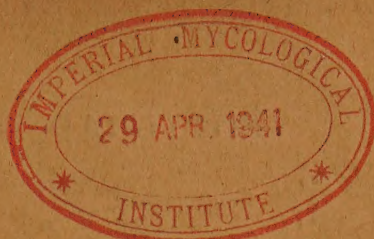


ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA



DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ENERO 1940 — ENTREGA I — TOMO CXXIX

SUMARIO

	<u>Pág.</u>
<i>CIENCIAS MATEMATICAS:</i>	
MISCHA COTLAR. — Familias normales de funciones no-analíticas	3
J. C. VIGNAUX. — Derivación e integración de la transformada de Laplace	26
JERÓNIMO SANGUINETI. — Consideraciones prácticas sobre el trazado geométrico de la cubatriz y la estrofoide	32
<i>CIENCIAS NATURALES:</i>	
KENNETH J. HAYWARD. — Ninfalidos argentinos (notas adicionales)...	43
Becas de la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias	48

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1940

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †	Dr. Carlos Darwin †	Dr. Enrique Ferri †
Dr. Mario Isola †	Dr. César Lombroso †	Ing. Eduardo Huergo †
Dr. Germán Burmeister †	Ing. Luis A. Huergo †	Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Benjamín A. Gould †	Ing. Vicente Castro †	Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. R. A. Phillippi †	Dr. Juan J. J. Kyle †	Dr. Angel Gallardo †
Dr. Guillermo Rawson †	Dr. Estanislao S. Zeballos †	Dr. Cristóbal M. Hicken †
Dr. Carlos Berg †	Ing. Santiago E. Barabino †	Dr. Alberto Einstein
Dr. Valentín Balbín †	Dr. Carlos Spegazzini †	Dr. Walter Nernst
Dr. Florentino Ameghino †	Dr. J. Mendizábal Tamborel †	

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Agullar; Ing. José Babini; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollan (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Adolfo T. Williams; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1939-1940)

<i>Presidente</i>	Ingeniero Jorge W. Dobranich
<i>Vicepresidente 1º</i>	Doctor Gonzalo Bosch
<i>Vicepresidente 2º</i>	Doctor Claro C. Dassen
<i>Secretario de actas</i>	Arquitecto Carlos E. Géneau
<i>Secretario de correspondencia.</i>	Doctor Santiago Barabino Amadeo
<i>Tesorero</i>	Ingeniero Edmundo Parodi
<i>Bibliotecario</i>	Ingeniero Carlos A. Lizer y Trelles
	Doctor Reinaldo Vanossi
	Profesor José F. Molino
	Doctor Alfredo Sordelli
<i>Vocales</i>	Ingeniero Pablo E. Bordenave
	Doctor Marcelino Herrera Vegas
	Doctor Jorge Magnin
	Doctor Juan C. Vignaux
	Doctor Antonio Casacuberta
	Ingeniero Julio R. Castiñeiras
	Ingeniero José S. Gandolfo
	Ingeniero Raúl E. Dubeqq
<i>Suplentes</i>	Doctor Alberto Castellanos
	Cap. de Fragata Teodoro Caillat Bois
	Ingeniero Alfredo G. Galmarini
	Ingeniero Benno J. Schnack
<i>Revisores de balances anuales.</i>	Doctor Félix Magnin
	Ingeniero Guillermo E. Cock

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

ANALES
DE LA
SOCIEDAD CIENTIFICA
ARGENTINA

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

TOMO CXXIX

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1940

FAMILIAS NORMALES DE FUNCIONES NO-ANALÍTICAS

POR

MISCHA COTLAR

INTRODUCCIÓN. — El estudio de las familias normales de funciones holomorfas (α) de una y varias variables, fué iniciado en una memoria del Dr. J. C. Vignaux ⁽¹⁾.

Dentro de esta clase muy general de funciones de variable compleja no holomorfas, existen sub-clases particularmente interesantes, como ser, la formada por las funciones *poligenas* (Calugareano), los *polinomios areolares* (Theodoresko), las funciones *poligenas armónicas* (Vignaux) y otras. En un trabajo en curso de publicación el Prof. Vignaux, estudia las «familias normales de polinomios areolares», cuyas propiedades se aproximan mucho a las de las funciones holomorfas ordinarias. Inspirado en estas ideas me propongo aquí, definir y estudiar una clase de funciones que llamamos funciones (NG) más general que las anteriores y a las cuales vamos a extender muchas propiedades de las familias normales de funciones analíticas.

Me es grato expresar aquí mi agradecimiento al Prof. P. Montel que tuvo la bondad de leer esta nota y hacerme varias observaciones que he tenido muy en cuenta al redactar la presente nota.

GENERALIDADES. — Llamaremos con Kasner y Calugareano, *función polígena* a toda función continua $f(z)$ de una variable compleja ⁽²⁾

$$z = x + iy$$

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

⁽¹⁾ Sur les familles normales de fonctions holomorphes (α), Compt. Rendus, 24 abril 1939; Contribución al estudio de las C. Físicomatemáticas, V. I., E. 5, septiembre 1937.

⁽²⁾ Véase J. C. VIGNAUX: *Sobre las funciones poligenas*. Anales de la S. C. Argentina, T. CXX.

cuyos componentes u y v tengan derivadas parciales continuas de primer orden. Estas funciones tienen en cada punto de su dominio, una *derivada radial*, definida por la fórmula de Riemann.

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_o = Sf(z) + e^{-2i\phi} . Df(z)$$

donde los operadores diferenciales

$$Df(z) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$Sf(z) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

se denominan respectivamente *derivada media* (Calugareano) y *derivada areolar* (Pompeiu) de la función $f(z)$.

De la expresión de $Df(z)$ se ve que para que una función polígona diferenciable sea holomorfa es necesario y suficiente que su derivada areolar sea nula.

De la fórmula de Riemann resulta que si $f(z)$ es holomorfa, su derivada ordinaria $f'(z)$ coincide con la derivada simétrica,

$$f'(z) = Sf(z)$$

La función $f(z)$ se dice «anti-holomorfa» cuando su derivada simétrica es nula, $Sf(z) = 0$; si $f(z)$ es antiholomorfa es $\varphi(z) = \overline{f(\bar{z})}$, evidentemente holomorfa.

La derivada areolar o simétrica de una función $f(z)$ puede tener a su vez una derivada areolar o simétrica. Estas se designarán así:

$$DSf(z) , D^2f(z) , S^2f(z) , \dots D^n S^m f(z) , \dots$$

es decir que designamos con $D^n S^m f(z)$ la derivada areolar n^{ma} de la derivada simétrica m^{ia} . Es fácil comprobar que $D^n S^m f(z) = S^m D^n f(z)$.

Pompeiu ha dado las siguientes dos fórmulas fundamentales:

Si $f(z)$ es polígena en el dominio Δ limitado por una curva simple C , se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} Df(v) dv = 0$$

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) dz}{z - \xi} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{Df(v) dv}{v - \xi}$$

análogamente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) d\bar{z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} Sf(v) dv = 0$$

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\xi}} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{Sf(v) dv}{\bar{v} - \bar{\xi}}$$

siendo $\bar{z}$ el conjugado de z ; en particular si $f(z)$ es antiholomorfa se tiene

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\xi}}$$

1. — Para que una función $f(z) = u + iv$ sea polígena es suficiente que sean continuas las derivadas parciales u'_x, v'_x, u'_y, v'_y . Luego las funciones poligenas forman una clase muy amplia y sólo pueden extenderse a ellas contados resultados de la teoría de las funciones holomorfas. Nos proponemos, pues, definir una clase de funciones más generales que las holomorfas pero menos que las poligenas, de modo que a esta clase intermedia sea posible extender los teoremas principales de las funciones holomorfas (*). Para ello examinaremos cuales son las propiedades más características de las funciones holomorfas.

Ante todo la función holomorfa $f(z)$ puede considerarse como una función polígena tal que $Df(z) = 0$ mientras que $Sf(z) = f'(z)$. Luego como primera propiedad característica tenemos el hecho que el módulo de la derivada areolar $|Df(z)|$ es menor o igual al módulo de la derivada simétrica. Pero la derivada $f'(z) = Sf(z)$ es

(*) Esto nos fué sugerido por el Dr. J. C. VIGNAUX.

a su vez una función holomorfa, luego es $|DSf(z)| \leq |S^2f(z)|$; en general la derivada n^{ma} es holomorfa y por lo tanto

$$|D^p S^n f(z)| \leq |S'^{n+p} f(z)| \frac{1}{2^{n+p}} \quad [1]$$

Luego si queremos dentro de las poligenas acercarnos a las holomorfas, debemos en primer lugar considerar aquellas funciones que verifican [1].

Por otra parte se sabe que la desigualdad más importante en la teoría de funciones analíticas, es la de Cauchy:

$$|f^n(z)| \leq n! \frac{M}{R^n}$$

donde R es la mínima distancia de z al contorno. Esta fórmula puede escribirse

$$|S^n f(z)| \leq n! \frac{M}{R^n} \quad [2]$$

Es pues natural que consideremos las funciones poligenas que satisfacen también a la relación [2]. De esta manera llegamos de un modo natural a la definición de la función poligena normal o función (N) :

DEFINICIÓN. — Diremos que $f(z)$ es una «función (N) » en el dominio Δ , cuando ella es poligena en Δ y admite las derivadas $D^m S^n f(z)$ de todos los órdenes que satisfacen a las 2 siguientes condiciones:

$$|D^p S^{n-p} f(z)| \leq \frac{1}{2^n} |S^n f(z)| \quad [I]$$

y

$$|S^n f(z)| \leq n! \frac{M}{R^n} \quad [II]$$

siendo R la mínima distancia de z al contorno C de Δ (*).

(*) El Prof. P. MONTEL nos indicó que las dos condiciones I y II pueden ser reemplazadas por una sola desigualdad del tipo Cauchy. Por ejemplo:

$$\frac{1}{n!} [|S^n f(\xi)| + |DS^{n-1} f(\xi)| \cdot n + \dots + |D^n f(\xi)|] \leq \frac{M}{R^n}.$$

Evidentemente, toda función holomorfa es una función (N). Para justificar la introducción de las funciones (N) falta demostrar la existencia de funciones (N) no holomorfas. Para ello indiquemos el siguiente método que permite obtener funciones (N) no holomorfas cada vez más generales:

Sea $f(z)$ una función cualquiera holomorfa en el círculo $|z| \leq 3$. Entonces la función.

$$\varphi(z) = \iint_{\Delta} \frac{f(v) dv}{\overline{v} - z}$$

es una función polígena tal que $S\varphi(z) = f(z)$ (*). Sea $D\varphi(z)$ la derivada areolar de $\varphi(z)$. Como $SD\varphi(z) = DSf(z) = Df(z) \doteq 0$ resulta que

$D\varphi(z)$ es una función anti-holomorfa en el dominio $|z| \leq 3$ y por lo tanto existe una constante M tal que para $|z| \leq 1/2$ y para todo n es

$$2^n |D^n \varphi(z)| < M$$

Por otra parte como $f(z)$ es holomorfa en $|z| \leq 2$ se puede tomar M de modo que sea también $|f^n(z)| < M$ para $|z| \leq 1$.

Una vez elegido M vamos a mostrar que la función

$$\Phi(z) = \iint_{\Delta} \frac{f(v) dv}{\overline{v} - z} + 4Me^z$$

es una función (N) en el círculo $|z| \leq 1/4$.

En efecto, tenemos $D^n \Phi(z) = D^n \varphi(z)$; $S^n \Phi(z) = f^{n-1}(z) + 4Me^z$ y si $n \neq 0$, $m \neq 0$ es $S^m D^n \Phi(z) = 0$. Luego para comprobar que se verifica (I) basta mostrar que $|D^n \Phi(z)| \leq |S^n \Phi(z)|$, y esto último es inmediato puesto que

$$\begin{aligned} |S^n \Phi(z)| &= |f^{n-1}(z) + 4Me^z| = |f^{n-1}(z) + 4M + 4Mz + 4M \frac{z^2}{2!} + \dots| \geq \\ &\geq 4M - |f^{n-1}(z)| - M - \frac{M}{3} \geq M \geq 2^n |D^n \Phi(z)|, \text{ para } |z| \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(*) J. C. VIGNAUX. — La transformada de Beltrame-Poincaré. Anales de la A. S. C.

Además como $S^n \Phi(z) = f^{n-1}(z) + 4Me^z$ resulta evidente que $\Phi(z)$ satisface también a (II). Luego es $\Phi(z)$ una función (N) en el círculo $|z| \leq \frac{1}{4}$.

Designemos con (N_1) , la clase de las funciones $\Phi(z)$ obtenidas por el procedimiento anterior. Repitiendo los razonamientos se verá fácilmente que dada una función $(N_1) \Phi_1(z)$, es posible elegir otra $\Phi_2(z)$ tal que la función

$$\iint_{\Delta} \frac{\Phi_1(v) dv}{\bar{v} - \xi} + M \Phi_2(\xi)$$

sea una función (N). Siguiendo de la misma manera se puede definir por recurrencia las infinitas clases (N_k) , siendo la función de la clase N_k definida por la fórmula

$$\iint \frac{\Phi(v) dv}{\bar{v} - z} + \Phi_1(z)$$

donde Φ y Φ_1 son funciones de la clase anterior.

Con este procedimientos se obtienen infinitas funciones (N) no holomorfas y cada vez más generales.

Las funciones (N_k) así obtenidas dan origen a un tipo de funciones « *poliarmónicas generalizadas* ». En efecto: sean

$$f(z) = u + iv ; Df(z) = U_{10} + iV_{01} ; Sf(z) = U_{10} + iV_{10} ;$$

$$DSf(z) = U_{11} + iV_{11} ; D^2f(z) = U_{20} + iV_{20} ; S^2f(z) =$$

$$= U_{02} + iV_{02}, \text{ etc.}$$

entonces se tiene por ejemplo

$$u_x' = U_{10} + U_{01} ; u_y' = V_{10} - V_{01} ; u_{x2}^2 = U_{20} + 2U_{11} + U_{02} ;$$

$$u_{y2}^2 = -(U_{20} - 2U_{11} + U_{02})$$

$$v_{x2}^2 = V_{20} + 2V_{11} + V_{02} ; v_{y2}^2 = -(V_{20} - 2V_{11} + V_{02}) \text{ etc.}$$

(vea el § siguiente).

Ahora, las funciones holomorfas están definidas por la propiedad $Df(z) = 0$ y dan origen a las funciones armónicas tales que $\Delta u = 4U_{11} = 0$. La aplicación sucesiva del operador Δu da origen a las poliarmónicas. Análogamente las funciones de la clase

(N_{κ}) están definidas por la propiedad generalizada $D^n S^m f(z) = 0$ y dan origen a operadores poliarmónicos generalizados.

Luego las funciones (N_{κ}) constituyen una clase de conjugados poliarmónicas generalizadas, de modo que: toda función poliarmónica generalizada da origen a una función (N) . Las funciones (N) forman por lo tanto una continuación natural de las holomorfas y de las armónicas.

2. — En lo que sigue vamos a considerar funciones más generales todavía que las funciones (N) que llamemos « funciones $(N G)$ ». Evidentemente que los teoremas que son ciertos para funciones $(N G)$ serán, con más razón ciertos para las funciones (N) . Las funciones $(N G)$ se definen así:

Diremos que ε es un cero de $f(z)$ de orden n , cuando $f(\varepsilon) = 0$, $Sf(\varepsilon) = 0$, ... $S^{n-1}f(\varepsilon) = 0$ y $S^n f(\varepsilon) \neq 0$. En general diremos que ε es un punto de orden n , cuando ε es un cero de orden n de la función $f(z) - f(\varepsilon)$. Evidentemente, que todo ε es por lo menos un punto de orden 1.

DEFINICIÓN. — Llamemos función $(N G)$ toda función polígena $f(z)$ que admite todas las derivadas $D^n S^m f(z)$ y que verifica las condiciones (I) y (II) para todo n que es $\leq$ que el orden del punto z ; en otras palabras las relaciones

$$\frac{2^n}{1} |D^{n-p} S^p f(z)| \leq |S^n f(z)| \leq n! \frac{M}{R^n} \quad [\text{I y II } G]$$

se verifican para $n \leq 2$ y para todo n tal que $Sf(z) = 0, \dots S^{n-1}f(z) = 0$.

De la definición de la función $(N G)$ se deduce:

1º) Toda función (N) , y en particular toda función holomorfa, es una función $(N G)$.

2º) Si $f(z)$ es una función $(N G)$, $f(z) - a$ ($a = \text{constante}$) es también una función $(N G)$.

3º) Si $f(z)$ es una función $(N G)$ y $h(z)$ una función holomorfa ($h'(z) \neq 0$), entonces la función $\varphi(z) = h(f(z))$ es también una función $(N G)$. En efecto, se tiene que

$$S^n \varphi(\xi) = \sum_p A_{n,p} h^p(\xi) \cdot [Sf(\xi)]^p \cdot S^{n-p} f(\xi)$$

donde los $A_{n,p}$ son constantes. Si $S\varphi(\xi) = 0$, se deduce $Sf(\xi) = 0$ y $S^2\varphi(\xi) = h'(\xi)$, $S^2f(\xi)$; en general si $S\varphi(\xi) = 0, \dots, S^{n-1}\varphi(\xi) = 0$, se deduce que $S^{n-p} D^p\varphi(\xi) = h'(f(\xi))$, $S^{n-p} D^pf(\xi)$ y las condiciones (I) y (II) G son evidentemente satisfechos por $\varphi(z)$.

3. — TEOREMA I. — Si $f(z)$ es una función (NG) y ξ un cero de $f(z)$ de orden n , entonces

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z)}{(z - \xi)^n} = \frac{1}{n!} \left\{ S^n f(\xi) + \binom{n}{1} S^{n-1} Df(\xi) e^{-2i\varphi} + \right. \\ \left. + \binom{n}{2} S^{n-2} D^2 f(\xi) e^{-4i\varphi} + \dots + D^n f(\xi) e^{-2ni\varphi} \right\}$$

cuando $z \rightarrow \xi$ según la dirección φ , es decir para

$$\frac{x}{y} \rightarrow \mu = \operatorname{tg} \varphi \quad z = x + iy;$$

para $n = 1$ se obtiene la fórmula de Riemann.

DEMOSTRACIÓN. — Supongamos, para simplificar, que $\xi = 0$ y que $n = 3$, sean

$$z = x + iy \quad f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

y

$$S^m D^n f(z) = D^n S^m f(z) = U_{n,m}(x, y) + i V_{n,m}(x, y).$$

Como $f(0) = u(0,0) + i v(0,0) = 0$, la fórmula de Taylor da:

$$u(x, y) = u'_x(0,0) \cdot x + u'_y(0,0) \cdot y + \frac{1}{2!} (u''_{xx}(0,0) \cdot x^2 + \\ + 2 u''_{xy}(0,0) \cdot xy + u''_{yy}(0,0) \cdot y^2) + \frac{1}{3!} (u'''_{xx}(x\theta, y\theta) \cdot x^3 + \\ + 3 u'''_{xy}(x\theta, y\theta) \cdot xy^2 + u'''_{yy}(x\theta, y\theta) \cdot y^3)$$

$$v(x, y) = (v'_x(0,0) \cdot x + v'_y(0,0) \cdot y) + \dots + \frac{1}{3!} (v'''_{xx}(x\theta, y\theta) \cdot x^3 + \\ + \dots + v'''_{yy}(x\theta, y\theta) \cdot y^3)$$

De

$$Df(z) = \frac{1}{2}[u_x' - v_y' + i(u_y' + v_x')] ; Sf(z) = \frac{1}{2}[u_x' + v_y' + i(v_x' - u_y')] ;$$

$$D^2f(z) = \frac{1}{4}[u_x^2 - 2v_{xy}^2 - u_y^2 + i(v_x^2 + 2u_{xy}^2 - v_y^2)] ;$$

$$S^2f(z) = \frac{1}{4}[u_x^2 + 2v_{xy}^2 - u_y^2 + i(v_x^2 - 2u_{xy}^2 - v_y^2)] ;$$

$$SDf(z) = DSf(z) = \frac{1}{4}[u_x^2 + u_y^2 + i(v_x^2 + v_y^2)]$$

$$D_3f(z) = \frac{1}{8}[u_x^3 - 3u_{xy}^2 - 3V_{xy} + V_y^3 + i(v_x^3 + 3u_{xy}^2 - 3v_{xy}^2 - u_y^3)] \text{ etc.}$$

se deducen:

$$u_x' = U_{10} + U_{01} ; u_y' = V_{10} - V_{01} ; V_x' = V_{10} + V_{01} = V_y' = U_{01} - U_{10} ;$$

$$u^2 = U_{10} + 2U_{11} + U_{02} ; u_y^2 = -(U_{20} - 2U_{11} + U_{02})$$

$$u_{xy}^2 = V_{20} - V_{02} ; v_{xy}^2 = U_{02} - U_{20} ; v_x^2 = V_{20} + 2V_{11} + V_{02}$$

$$v_y^2 = -(V_{20} - 2V_{11} + V_{02}) ; u_x^3 = U_{30} + 3U_{21} + 3U_{12} + U_{03} [1]$$

$$u_{xy}^3 = V_{30} - V_{03} + V_{21} - V_{12} \text{ etc.}$$

(las fórmulas generales pueden obtenerse utilizando los polinomios de Tchebitchev).

Como por hipótesis es $Sf(0) = 0$, $S^2f(0) = 0$, resulta en virtud de [I] y [II] que $D^p S^{m-p}f(0) = 0$, si $m \leq 2$, es decir que $U_{p,m-p}(0,0) = 0$, $V_{p,m-p}(0,0) = 0$; luego en virtud de las fórmulas [1] resulta $u_{xpy m-p}^m(0,0) = 0$, $v_{xpy m-p}^m(0,0) = 0$ para $M \leq 2$, y por lo tanto

$$\frac{f(z)}{z^3} = \frac{u(x,y) + i v(x,y)}{(x + iy)^3} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{u_x^3(x_0, y_0) \cdot x^3 + \dots + u_y^3(x_0, y_0) \cdot y^3 + i[v_x^3(x_0, y_0) \cdot x^3 + \dots]}{(x + iy)^3}$$

$$= \frac{1}{3!} \frac{u_x^3 + 3\mu \cdot u_{xy}^2 + 3\mu^2 u_{yy}^2 + \mu^3 u_y^3 + i[v_x^3 + 3v_{xy}^2 \cdot \mu + 3u^2 v_{yy}^2 + \mu^3 v_y^3]}{(1 + i\mu)^3}$$

teniendo en cuenta las fórmulas [1] y que

$$\frac{1 - \mu}{1 + i\mu} = e^{-2i\varphi} , \quad \frac{1 - 2i\mu - \mu^2}{(1 + i\mu)^2} = e^{-4i\varphi} \text{ etc.}$$

se comprueba fácilmente que la última expresión para $\frac{f(z)}{z^3}$ es idéntica a la siguiente:

$$\frac{f(z)}{z^3} = \frac{1}{3!} [S^3 f(x\theta, y\theta) + 3 S^2 D f(x\theta, y\theta) e^{-2i\theta} + \\ + 3 S D^2 f(x\theta, y\theta) e^{-4i\theta} + D^3 f(x\theta, y\theta) e^{-6i\theta}]$$

y haciendo $z \rightarrow 0$, $x\theta \rightarrow 0$, $y\theta \rightarrow 0$ resulta la tesis.

Vamos a dar otra demostración del mismo teorema porque los razonamientos de esta otra demostración se aplican a casos muy generales y nos serán útiles en adelante. Ella se basa en el siguiente lema.

LEMA I. — Si $f(z)$ es una función continua en ξ y polígona en todos los demás puntos de Δ , y si $Df(z)$ es continua en todo Δ , entonces es $f(z)$ polígona en todo Δ . *Demostración.* — Sea γ un círculo de centro ξ , interior a Δ , y sea δ circunferencia de γ . Como $f(z)$ es polígona en $\Delta - \gamma$, para $z \in \Delta - \gamma$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\delta} \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta-\delta} \frac{Df(t) dt}{t-z}$$

Como $f(z)$ y $D(z)$ son continuas en ξ , es

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta} \frac{f(t) dt}{t-z} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{\delta} \frac{Df(t) dt}{t-z} \rightarrow 0,$$

luego haciendo $\delta \rightarrow 0$ resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t) dt}{t-z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{Df(t) dt}{t-x} \quad \text{para } z \in \Delta - \gamma.$$

Pero por otra parte

$$\int_{c-\delta} \frac{f(t) dt}{t-\xi} - 2i \iint_{\Delta-\gamma} \frac{Df(t) dt}{t-\xi} = 0,$$

y como $f(z)$ es continua en ξ es

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta} \frac{f(t) dt}{t-\xi} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} f(\xi),$$

luego
$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(t) dt}{t-\xi} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D(f) dt}{t-\xi}$$

es decir que la fórmula de Pompeiu se verifica para todo $z \in \Delta$, 1. q. d. d.

2ª demostración del teorema I. — El teorema es cierto para $n=1$ puesto que en este caso coincide con la fórmula de Riemann.

Sea ahora $n=2$. En este caso tenemos $f(\xi)=0$, $Sf(\xi)=0$ y en virtud de (I) resulta $Df(\xi)=0$. Supongamos por un momento que $D^2f(\xi)=0$, lo que equivale a escribir $Df(z) = zD^2f(\xi)$ en vez de $Df(z)$. La función

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z - \xi}$$

es entonces continua, porque para $z \rightarrow \xi$ se deduce de la fórmula de Riemann y de $Df(\xi)=0$ que $f_1(z) \rightarrow 0$. Por otra parte,

$$Df_1(z) = \frac{Df(z)}{z - \xi} \text{ y como } D(\xi)=0 \text{ resulta}$$

$$\lim_{z \rightarrow \xi} Df_1(z) = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{Df(z)}{z - \xi} = D^2f(\xi) e^{-2i\varphi} + S Df(\xi) = S Df(\xi), \quad [1]$$

puesto que $D^2f(\xi)=0$, es decir que $Df_1(z)$ es continua en todo Δ . Luego, en virtud del Lema I es $f_1(z)$ polígena en Δ y por consiguiente $Sf(z)$ es también continua y como $f_1(\xi)=0$, resulta

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f_1(z)}{z - \xi} = Df_1(\xi) e^{-2i\varphi} + Sf_1(\xi) \quad [2]$$

Pero

$$Sf_1(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} Sf_1(z) = \lim_{z \rightarrow \xi} S \frac{f(z)}{z - \xi} = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{Sf(z)}{z - \xi} = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} \quad [3]$$

Como

$$Sf(\xi) = 0 \text{ es } \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{Sf(z)}{z - \xi} = D Sf(\xi) e^{-2i\varphi} + S^2f(\xi) \quad [4]$$

y de [1], [2], [3] y [4] resulta

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} = S Df(\xi) e^{-2i\varphi} + \frac{1}{2} S^2f(\xi)$$

La última fórmula fué obtenida considerando $Df(z) - \overline{z}D^2f(\xi)$ en vez de $Df(z)$, luego para la hipótesis inicial se tiene

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} = \frac{1}{2} D^2 f(\xi) e^{-4\epsilon} + S D f(\xi) e^{-2\epsilon} + \frac{1}{2} S^2 f(\xi).$$

De la misma manera se demuestra el teorema para n cualquiera.

TEOREMA II. — Si $f(z)$ es una función (NG) no constante, todo cero de $f(z)$ tiene un orden finito. Es decir que a todo ϵ corresponde un n tal que $S^n f(\epsilon) \neq 0$. *Demostración:* Sea ϵ un cero de orden infinito, es decir que $S^n f(\epsilon) = 0$ para todo n . Sean

$$z = x + iy ; f(z) = u(x, y) + i v(x, y) ; D^m S^n f(z) = U_{m,n}(x, y) + i V_{m,n}(x, y).$$

Sea R el límite inferior de la distancia de ϵ a un punto del contorno C , y γ un círculo de centro ϵ y radio

$$\rho < \frac{R}{2^k} \quad (\kappa > 3)$$

y sea $z = x + iy$ un punto de γ .

Supongamos, para simplificar, que $\epsilon = 0$; la fórmula de Taylor nos da

$$u(x, y) = u(0,0) + [u'_x(0,0) \cdot x + u'_y(0,0) \cdot y] + \dots + R_m \quad [1]$$

donde

$$R_m = \frac{1}{m!} \left[x \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial y_1} \right]^m u(x_1, y_1) \quad [2]$$

Como en el teorema I se verá que

$$u_{x^m y^{m-p}}^m(x, y) = \sum_h A_{m,p}^{(h)} U_{m,m-h}(x, y)$$

donde $A_{m,p}^{(h)}$ son constantes. Como por hipótesis $S^n f(0) = 0$ para todo n , es en virtud de (I) y (II) $D^m S^p f(0) = 0$, luego $u_{x^m y^{m-p}}^m(0,0) = 0$ para todo m y por lo tanto [1] viene

$$u(x, y) = R_m = \frac{1}{m!} \left[x \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial y_1} \right]^m u(x_1, y_1) \quad [3]$$

Ahora, se tiene que

$$u_{x^m}^m(x, y) = U_{m,0}(x, y) + \binom{m}{1} U_{m-1,1}(x, y) + \binom{m}{2} U_{m-2,2}(x, y) + \dots + U_{0,m}(x, y) \quad [4]$$

En virtud de (II) es

$$|U_{m-p,p}(x_1, y_1)| \leq m! \frac{M}{R^m} \quad [5]$$

y como $|x| \leq \frac{R}{2^k}$, $k > 3$, resulta

$$\frac{1}{m!} |u_{x^m}^m(x_1, y_1) \cdot x^m| \leq 2^{m+1} \cdot \frac{M}{R^m} \cdot \frac{R^m}{2^{km}} \leq \frac{M}{2^{2m}} \quad [6]$$

De la misma manera se acotan los demás términos de [3], luego

$$|u(x, y)| \leq \frac{M}{2^m} \quad [7]$$

para todo m y para todo $(x, y) \in \gamma$, es decir que debe ser $u(x, y) = 0$. Análogamente se verá que $v(x, y) = 0$, luego $f(z) = 0$ si $z \in \gamma$ l.q.d.d.

TEOREMA III.—Los ceros de una función (NC) no constante son puntos aislados.

Demostración.—Sea ξ un cero de orden n de $f(z)$. En virtud del teorema I es

$$\lim_{z \rightarrow \xi} n! \frac{f(z)}{(z - \xi)^n} = S^n f(\xi) + \sum_{p=1}^n S^{n-p} D^p f(\xi) e^{-2ip\varphi}$$

y $S^n f(\xi) \neq 0$. Sea $\Sigma(z)$ una función que para $z \neq \xi$ es igual a

$$\Sigma(z) = n! \frac{f(z)}{(z - \xi)^n} - \sum_{p=1}^n S^{n-p} D^p f(\xi) e^{-2ip\varphi(z)} \quad [1]$$

donde $\varphi(z) = \arg(z - \xi)$, y para $z = \xi$

$$\Sigma(\xi) = S^n f(\xi) \quad [2]$$

La función $\Sigma(z)$ así definida es continua en ξ y $\Sigma(\xi) \neq 0$.

Como en virtud de [I] es $\sum_{\rho=1}^n |S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi)| < |S^n f(\xi)|$, podemos, pues, hacer

$$\sum_{\rho=1}^n |S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi)| = \varepsilon \cdot |S^n f(\xi)| \text{ con } \varepsilon < 1 \quad [3]$$

luego para todo z se tiene

$$\left| \sum_{\rho=1}^n S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) e^{-2\rho i\varphi(z)} \right| \leq \varepsilon \cdot |S^n f(\xi)| \quad [4]$$

Como $\Sigma(z)$ es continua y $\Sigma(\xi) = S^n f(\xi) \neq 0$; existe un círculo γ de centro ξ tal que para $z \in \gamma$ se tiene

$$|\Sigma(z)| = \sigma_z \cdot |S^n f(\xi)| \text{ y } \sigma_z > \varepsilon \quad [5]$$

luego teniendo cuenta de [4] resulta

$$\begin{aligned} & \left| \Sigma(z) + \sum_{\rho=1}^n S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) \cdot e^{-2\rho i\varphi(z)} \right| \geq \\ & \geq \left| \Sigma(z) \right| - \left| \sum_{\rho=1}^n S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) e^{-2\rho i\varphi(z)} \right| \geq (\sigma_z - \varepsilon) |S^n f(\xi)| > 0 \quad [6] \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$n! |f(z)| = |z - \xi|^n \cdot \left| \Sigma_1(z) + \sum_{\rho=1}^n S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) e^{-2\rho i\varphi(z)} \right| > 0$$

para $z \neq \xi$ l.q.d.d.

TEOREMA IV. — Sea $f(z)$ una función (NC) en Δ que no se anula sobre el contorno C . Entonces el número de ceros N de $f(z)$ en Δ es igual al cociente por 2π de la variación del argumento de $f(z)$, cuando z describe el contorno C ,

$$N = \frac{1}{2\pi} \text{variat}_c \arg f(z).$$

Demostración. — Consideremos antes el caso en que $f(z)$ no tiene ningún cero en Δ . En este caso, cuando z describe C , $f(z)$ describe una curva que no rodea el origen, pues si reducimos C a

un punto por deformación continua, se reducirá a un punto por deformación continua sin encontrar jamás el punto 0 ; luego

$$\frac{1}{2\pi} \text{var}_c \arg f(z) = 0 = N.$$

En el caso general podemos suponer, sin restarle generalidad a la demostración, que $f(z)$ tiene un cero de orden n , puesto que en virtud del th III los ceros son aislados. Sea ξ este cero de orden n . Conservando las notaciones del teorema precedente, es

$$n!f(z) = (z - \xi)^n \left[\sum (z) + \sum_{\rho=1} S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) e^{-2i\rho\varphi(z)} \right]$$

Como hemos visto, se puede elegir un círculo γ de centro ε de modo que para $z \in \gamma$ sea

$$\left| \sum_{\rho=1} S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) e^{-2i\rho\varphi(z)} \right| < K \cdot \left| \sum (z) \right|, \quad K < 1$$

de modo que si z describe la circunferencia δ de γ ,

$$\sum_{\rho=1} S^{n-\rho} D^{\rho} f(\xi) e^{-2\rho i\varphi(z)}$$

no puede rodear ningún punto $\Sigma(z)$, luego

$$\text{variat}_s \arg f(z) = \text{variat}_s (z - \xi)^n = 2\pi \cdot n.$$

Como en $\triangle - \gamma$ $f(z)$ no se anula, resulta en virtud de lo visto más arriba que

$$\text{variat}_c \arg f(z) = \text{v. arg}_s f(z) = 2\pi \cdot n \quad \text{l. q. d. d.}$$

COROLARIO. — Si sobre el contorno C es $|f(z)| > |a|$, entonces $f(z) - a$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros en $\triangle$. *Demostración:* $f(z) - a$ es una función (NC) y $f(z) - a \neq 0$ sobre C , luego en virtud del teorema, el número de ceros de $f(z) - a$ es =

$$\text{var}_c \arg (f(z) - a) = \text{var}_c \arg f(z) \cdot \left(1 - \frac{a}{f(z)} \right) = \text{var}_c \arg f(z),$$

puesto que $\left| \frac{a}{f(z)} \right| < 1$ y por lo tanto $1 - \frac{a}{f(z)}$ no rodea el origen, l. q. d. d.

TEOREMA V. — Si $|f(\varepsilon)| = \max_{z \in \Delta} |f(z)|$ y ε es interior a Δ , es $f(z) = \text{constante}$.

Demostración — Se entiende que suponemos $f(z)$ una función (NG). La función $\varphi(z) = f(z) - f(\varepsilon)$ es una función (NG) y $\varphi(\varepsilon) = 0$. Si $f(z) \neq \text{constante}$ existe un círculo γ de centro ε y de circunferencia δ tal que $\min_{\gamma} |\varphi(z)| = m > 0$. Si $0 < |a| < m$ resulta del corolario del t. IV que existe un x de γ tal que $\varphi(x) = a$ ó $f(x) = f(\varepsilon) + a$, y por consiguiente se puede tomar a de suerte que sea $|f(x)| > |f(\varepsilon)|$ l. q. d. d.

NOTA. — Es fácil ver que las demostraciones de los teoremas I, II, II, IV y V se aplican también a la función $Sf(z)$. Luego el principio del máximo módulo es cierto también para la derivada simétrica de una función (NG).

4. — LEMA II. — Si $f(z)$ es una función (NG) se tiene la fórmula

$$Sf(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-\xi)^2} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{Df(z)}{(z-\xi)^2} dz,$$

que en el caso de una función holomorfa da la fórmula de Cauchy.

Demostración. — Pongamos para $z \neq \xi$.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} + \frac{1}{2} Df(\xi) e^{-2i \arg(z-\xi)} - \\ &\quad - \frac{1}{4} D^2 f(\xi) e^{-4i \arg(z-\xi)} \cdot z. \end{aligned}$$

Como

$$D\varphi(z) = \frac{Df(z) - Df(\xi)}{z - \xi} - D^2 f(\xi) e^{-2i \arg(z-\xi)}$$

razonando como en el teorema I, resulta que $\varphi(z)$ y $D\varphi(z)$ son continuas en ξ , puesto que

$$\varphi(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} \varphi(z) = Sf(\xi) \text{ y } D\varphi(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} D\varphi(z) = SDf(\xi).$$

Luego en virtud del lema I, se tiene la fórmula

$$S f(\xi) = \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{z - \xi} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z)}{z - \xi} dz$$

que después de sustituir $\varphi(z)$ por su valor y efectuar las operaciones, dá la tesis.

LEMA III. — Si $\varphi(z)$ es una función (NG) es el círculo $|z| \leq 1$ y si en dicho círculo es $|S\varphi(z)| \leq N$, entonces se tiene $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \leq 3/2 N |\xi|$ para todo $|\xi| < 1$. *Demostración:* En el teorema I hemos deducido la siguiente fórmula:

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \frac{1}{2} [S\varphi(\xi') + e^{-2i \arg \xi} D\varphi(\xi')] \cdot \xi.$$

Como en virtud de la condición I es $|D\varphi(\xi')| \leq \frac{1}{2} |S\varphi(\xi')|$

resulta que

$$\begin{aligned} |S\varphi(\xi') + e^{-2i \arg \xi} D\varphi(\xi')| &\leq |S\varphi(\xi')| + \\ &+ |D\varphi(\xi')| \leq \frac{3}{2} |S\varphi(\xi')| \leq \frac{3}{2} N \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \leq \frac{3}{2} N |\xi| \quad \text{l. q. d. d.}$$

LEMA IV. — Sea $\varphi(z)$ una función (NC) en el círculo $|z| \leq 1$ (que designaremos con Δ y su circunferencia con C) tal que:

$$\varphi(0) = 0, S\varphi(\sigma) = 1 \quad |\varphi(z)| \leq \frac{N}{3} \quad |S\varphi(z)| \leq \frac{N}{3} \quad \text{para } |z| \leq 1.$$

Entonces se tiene

$$|\varphi(\xi)| \geq \frac{|\xi|}{2} - \frac{N|\xi|^2}{1 - |\xi|} \quad \text{para } |\xi| < 1.$$

Demostración.—Tomando en cuenta el lema II, la fórmula de

Pompeiu y $\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{z} + \frac{\xi}{z^2} + \frac{\xi^2}{z^2(z - \xi)}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{z - \xi} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z)}{z - \xi} dz = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{z} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z)}{z} dz \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z)}{z^2} dz \right) \cdot \xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z) \xi^2 dz}{z^2(z - \xi)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z) \cdot \xi^2 dz}{z^2(z - \xi)} = \\ &= \varphi(o) + S\varphi(o) \cdot \xi + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z) \xi^2 dz}{z^2(z - \xi)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z) \xi^2}{z^2(z - \xi)} dz = \\ &= \xi + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z) \xi^2 dz}{z^2(z - \xi)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z) \xi^2}{z^2(z - f)} dz.\end{aligned}$$

En virtud del lema III es

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{D\varphi(z) \xi^2}{z^2(z - \xi)} dz \right| &\leq 3 \left| \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{|SD\varphi(z) \xi^2|}{|z| |z - \xi|} \right| \leq \\ &\leq 3 |\xi^2| |SD\varphi(\xi)| \leq \frac{N |\xi|^2}{2(1 - |\xi|)}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}|\varphi(\xi)| &\geq \frac{1}{2} |\xi| - \frac{N |\xi|^2}{2(1 - |\xi|)} - \frac{N |\xi|^2}{2(1 - |\xi|)} = \\ &= \frac{1}{2} |\xi| - \frac{N |\xi|^2}{1 - |\xi|} \quad \text{l. q. d. d.}\end{aligned}$$

Una demostración directa del mismo lema se obtiene utilizando la fórmula obtenida en el teorema I:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \varphi(o) + \frac{1}{2} [S\varphi(o) + D\varphi(o) \cdot e^{-2i \arg \xi} | \xi | + \\ &+ \frac{1}{2!} [S^2\varphi(\xi') + 2SD\varphi(\xi') \cdot e^{-2i \arg \xi} + D^2\varphi(\xi') \cdot e^{-4i \arg \xi}] \xi^2.\end{aligned}$$

En virtud de las condiciones I y II es

$$\begin{aligned} |S \varphi(o) + D \varphi(o) \cdot e^{-2i \arg \xi}| &\geq |S \varphi(o)| - |D \varphi(o)| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} |S \varphi(o)| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y

$$|S^2 \varphi(\xi')| + 2 |S D \varphi(\xi')| + |D^2 \varphi(\xi')| \leq |S^2 \varphi(\xi')| + 2 \leq \frac{N}{1 - |\xi|}$$

luego

$$|\varphi(\xi)| \geq \frac{|\xi|}{2} - \frac{N |\xi|^2}{1 - |\xi|} \quad \text{l. q. d. d.}$$

TEOREMA VI. — Sea $w = f(z)$ una función (NC) en el círculo $|z| \leq R$, tal que

$$|f(z)| \leq M, \quad |Sf(z)| \leq M, \quad |Sf(o)| \leq a, \quad f(o) = 0 \text{ y } |Sf(o)| = a > 0.$$

Entonces existe un círculo $|w| \leq \Phi$ tal, que los valores de $f(z)$ cubren este círculo y

$$\Phi = \Phi(M, Ra) = \frac{M \cdot Ra}{12}$$

Demostración. — La función

$$\varphi(z) = \frac{f(Rz)}{R \cdot Sf(o)}$$

es una función (NC) en el círculo $|z| \leq 1$ y $\varphi(0) = 0$, $S\varphi(0) = 1$. En virtud del lema IV es

$$|\varphi(\xi)| \geq \frac{1}{2} |\xi| - \frac{N |\xi|^2}{1 - |\xi|}$$

donde N es el mayor de los números M y $\frac{M}{Ra}$ luego $N = N(M, Ra)$.

Como $|S\psi(0)| \leq N$, es decir $N \geq 1$, resulta que para

$$|\xi| = \frac{1}{8N} \quad \text{es} \quad |\varphi(\xi)| \geq \frac{1}{12N} > 0.$$

Luego en virtud del Corolario del t. IV $\varphi(z)$ toma todo valor de módulo $\leq \frac{1}{12N}$ l. q. d. d.

TEOREMA VII (Bloch).—Si $\varphi(z)$ es una función (NC) en el círculo $|z| \leq 1$ y $S\varphi(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, los valores de $\varphi(z)$ cubren un círculo cuyo radio depende generalmente de la función, pero cuyo radio es siempre $\geq a/24$. *Demostración:* Sea

$$T(\theta) = \theta \cdot \max_{|z| \leq 1-\theta} |S\varphi(z)| \quad (\theta \text{ real y } 0 \leq \theta \leq 1)$$

Entonces: 1) $T(0) = 0$; 2) $T(1) = 1$; 3) $T(\theta)$ es continua en $(0,1)$.

Luego existe un $\theta_0 > 0$ tal que $T(\theta_0) = 1$ pero si $\theta < \theta_0$ es $T(\theta) < 1$. Sea ξ ($|\xi| = 1 - \theta_0$) el punto para el cual

$$|S\varphi(\xi)| = \max_{|z| \leq 1-\theta_0} |S\varphi(z)| \quad (\text{Nota del T. V.}).$$

Entonces $|S\varphi(\xi)| = \frac{1}{\theta_0}$. En el círculo $|z - \xi| \leq \frac{\theta_0}{2}$ se tiene $|S\varphi(z)| \leq \frac{2}{\theta_0}$, puesto que si $|z| \leq 1 - \frac{\theta_0}{2}$ es por definición

$$\max_{|z| \leq 1-\theta_0} |S\varphi(z)| = \frac{T\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\theta_0/2} \leq \frac{2}{\theta_0}.$$

Luego

$$|S\varphi(z)| \leq \frac{2}{\theta_0} \text{ para } |z - \xi| \leq \frac{\theta_0}{2}, \text{ y } |S\varphi(\xi)| = \frac{1}{\theta_0} \quad [1]$$

En virtud del lema III es entonces

$$|\varphi(z) - \varphi(\xi)| \leq 4 \text{ para } |z - \xi| \leq \frac{\theta_0}{2}.$$

Podemos, por lo tanto, aplicar el teorema precedente, puesto que

$$|\varphi(z) - \varphi(\xi)| \leq 4, \quad |S\varphi(z)| \leq 4 \cdot |S\varphi(\xi)|, \quad a = \frac{1}{\theta_0},$$

$$Ra = \frac{\theta_0}{2} \cdot \frac{1}{\theta_0} = \frac{1}{2}, \quad M = 4,$$

luego la función $\varphi(z) - \varphi(\xi)$ cubre un círculo de radio $\frac{1}{24}$ l. q. d. d.

TEOREMA VIII (Schotky). — Si $f(z)$ es una función (NC) en el círculo $|z| \leq 1$, que no toma los valores 0 y 1, es

$$|f(z)| < \Phi[f(0), |z|].$$

Demostración. — La función

$$F(z) = \lg \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi i} \lg f(z)} - \sqrt{\frac{1}{2\pi i} \lg f(z) - 1} \right]$$

es una función (NC) (3º del § 2) y, como se sabe, no toma los valores de la forma $\pm \lg(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + 2m\pi i$ ($n > 1$) que forman un conjunto E tal que todo punto del plano tiene una distancia a $E <$ que una constante $\delta > 0$. Como la función

$$\varphi(\xi) = \frac{F[z + (1 - |z|)\xi] - F(z)}{(1 - |z|)SF(z)}$$

es una función (NC) en $|\xi| \leq 1$ y $\varphi(0) = 0$, $S\varphi(0) = 1$, resulta del teorema de Bloch que $\varphi(\xi)$ cubre un círculo de radio $\frac{1}{24}$, luego en virtud de la propiedad de $F(z)$ debe ser

$$\frac{1}{24} (1 - |z|) |SF(z)| < b \quad \text{o} \quad |SF(z)| < \frac{24b}{1 - |z|}.$$

En virtud del lema III resulta

$$|F(z)| < |F(0)| + \frac{24b \cdot 4|z|}{1 - |z|}$$

y

$$|f(z)| < \Phi[f(0), |z|] \quad \text{l. q. d. d.}$$

§ 5. — Las definiciones de familia normal y de familia igualmente continua son las mismas para las funciones holomorfas y las (NC). Del teorema de Schotky, ya resulta fácilmente, que si las funciones (NC) $\{f(z)\}$ no toman los extremos de un reticulado infinito, ellas forman una familia igualmente continua. Repitiendo los razonamientos clásicos se deduce el teorema general.

TEOREMA IX. — Si las funciones $(NC) \{f(z)\}$ no toman dos valores, ellas forman una familia normal.

La demostración es la misma que para las funciones holomorfas, haciendo uso del teorema de Schotky. En particular resulta que:

Si las funciones $(NC) \{f(z)\}$ en el dominio Δ tienen sus módulos uniformemente acotados, ellas forman una familia normal. Análogamente se deducen los otros criterios de familias normales.

6. — Diremos que ε es un punto singular aislado de $f(z)$, cuando $f(z)$ es polígena en todo punto de un círculo Δ de centro ε , menos en ε .

Diremos que ε es un punto singular aislado esencial, cuando ε es punto singular de $f(z)$ y de $\frac{1}{f(z) - a}$.

Una función $(NC) f(z)$ no puede ser acotada alrededor de un punto singular esencial aislado; en efecto, sea δ un círculo concéntrico de Δ y z_0 un punto de la corona. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta-\rho} \frac{Df(z)}{z - z_0} dz.$$

Si $|f(z)| < M$ resulta que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz \rightarrow 0$, y como también $\lim_{\rho \rightarrow 0} \iint \frac{Df(z)}{z - z_0} dz \rightarrow 0$ resulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{Df(z)}{z - z_0} dz$$

y la singularidad es evitable.

De acá resulta el TEOREMA DE PICARD. Una función (NC) toma alrededor de un punto singular esencial todo valor finito menos uno. En efecto, la demostración del teorema de Picard exige solamente el de Weirstrass y el de Schotky, los cuales ya hemos demostrado para las funciones (NC) .

7. — Llamemos « grupo (N) » a todo conjunto de funciones (N) tales que la diferencia de dos cualesquiera de ellas es una función (N) . Del teorema III resulta que si $f(z)$ y $g(z)$ pertenecen a un grupo y $f(z) = g(z)$ para infinitos z completamente interiores del

dominio, es $f(z) = g(z)$ para todo z . Si f_n es una sucesión de funciones pertenecientes a un grupo, y $f_n(z) \rightarrow f(z)$, se deduce del Corolario del t. V, que todas las $f_n(z)$ desde un n tienen el mismo número de raíces que $f(z)$, o $f(z) = \text{constante}$ (Hurwitz). Como además toda función, límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones (N) es una función (N) , se deduce, repitiendo los razonamientos clásicos, el

TEOREMA X (Landau-Caratheodory).— Si ninguna de las funciones (N) ($f_n(z)$) pertenecientes a un grupo, no toman dos valores, la convergencia de $f_n(z)$ en infinitos puntos interiores a Δ , es suficiente para asegurar la uniforme convergencia en interior de Δ .

Buenos Aires, septiembre de 1939.

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

POR

J. C. VIGNAUX

Se debe a S. Pincherle ⁽¹⁾ el siguiente teorema fundamental:

Si $f(z)$ es la transformada de Laplace de la $\varphi(x)$

$$f(z) = \int_c^\infty e^{-xz} \varphi(x) dx, \quad [1]$$

ella es regular en el interior de su semiplano de convergencia $R(z) > \xi$, y sus derivadas sucesivas están dadas por la relación

$$f^{(n)}(z) = \int_c^\infty e^{-xz} \cdot x^n \varphi(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad [2]$$

Mas general ⁽²⁾: si α es un número real cualquiera y c positivo, entonces la integral

$$f_\alpha(z) = \int_c^\infty e^{-xz} x^\alpha \varphi(x) dx$$

converge también para $R(z) > \xi$ ⁽³⁾.

⁽¹⁾ *Sur les fonctions déterminants*. Ann. Ecole. Norm. Sup. (8) 22 (1905); *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche* (Bologne, 1922). El prof. G. DOETSCH en su obra fundamental *Theorie und anwendung der Laplace-Transformations* (Berlín, 1937), pág. 43, da una demostración simple de este teorema. M. CIBRANO enuncia la propiedad que: la abscisa de convergencia λ' de la [2] es menor ó igual que la abscisa λ de la [1] para incluir el caso posible de λ' finito y $\lambda = \infty$, $<$. *La trasformazioni di Laplace*. Rend. Inst. Lomb. (62) (1929).

⁽²⁾ S. PINCHERLE, *Gli elementi della teorie...* pág. 318 (d).

⁽³⁾ Haremos notar de paso que, si el exponente α es un número real cualquiera, el límite inferior de la integral σ debe ser positivo, pues de lo con-

En esta Nota me propongo deducir algunas consecuencias de este último teorema y su extensión a las integrales dobles de Laplace.

2. — Sea la transformada de Laplace

$$f(z) = \int_c^\infty e^{-zs} \varphi(x) dx, \quad (c > 0)$$

y consideremos la integral

$$f^{(-1)}(z) = \int_c^\infty f(z) dz$$

donde el camino de integración $(z \dots \infty)$ está en el interior de su semiplano de convergencia $R(z) > \xi$.

Se tiene entonces

$$f^{(-1)}(z) = \int_z^\infty dx \int_c^\infty e^{-xs} \varphi(x) dx = \int_c^\infty \varphi(x) dx \int_z^\infty e^{-xs} dz,$$

trario la proposición no es exacta. Así por ej. la integral de Laplace de generatriz $\varphi(s) = 1$

$$\int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad z = x + iy$$

converge en el semiplano $R(z) = x > 0$; mientras que la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$$

solamente, cuando es: $\alpha > -1$, $R(z) > 0$; Véase G. DOETSCH, *Loc. cit.* pág. 22, ej. 1 y 3.

La integral

$$\int_c^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}$$

converge para $R(z) > 0$, cualquiera sea la constante c ; mientras que, en la integral $\int_c^\infty e^{-st} \cdot t^k dt$, se puede tomar c arbitrariamente para $k > -1$, pero debe ser *positivo* si es $k \leq 1$. La convergencia tiene lugar para $R(z) > 0$; (Véase S. PINCHERLE, *Loc. cit.*, *Gli elementi...* pág. 318, caso a) y b).

la permutación del orden de integración es legítima ⁽¹⁾ puesto que la integral

$$\int_z^\infty e^{-zs} dz = \frac{1}{s} e^{-zs}$$

converge uniformemente para todo $x > 1$ y la integral

$$\int_c^\infty \frac{\varphi(x)}{x} e^{-xs} dx$$

existe según el teorema generalizado de Pincherle anteriormente enunciado. Por tanto; se tiene

$$f^{(-1)}(z) = \int_c^\infty \frac{\varphi(x)}{x} e^{-xs} dx.$$

Aplicando sucesivamente esta relación a la función $f(z)$, resulta entonces, como expresión de las integrales sucesivas a lo largo del camino $(z \dots \infty)$, las siguientes

$$f^{(-n)}(z) = \int_c^\infty \frac{\varphi(x)}{x^n} e^{-xs} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad [B]$$

3.— El teorema de Pincherle y nuestra conclusión anterior, permite introducir para la función determinante $f(z)$, una cierta *derivación e integración de orden α real y positivo*, mediante las relaciones siguientes:

$$D^{(\alpha)} f(z) = \int_c^\infty e^{-zs} x^\alpha \varphi(x) dx, \quad (\alpha > 0)$$

y

$$D^{(-\alpha)} f(z) = \int_c^\infty e^{-zs} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx, \quad (\alpha > 0)$$

las cuales coinciden respectivamente con las relaciones (A) y (B) para α entero y positivo.

(1) Véase por ej. S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, p. 446.

4.—La función determinante $f(z)$ admite, bajo condiciones generales, un desarrollo asintótico ⁽¹⁾ en el sentido de Poincaré

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^n}; \quad [1]$$

lo cual significa que la expresión

$$\varepsilon_n(z) = z^n \left[f(z) - \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{z^i} \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

tiende a cero, cuando $R(z) \rightarrow +\infty$.

Supongamos que $a_0 = 0$, entonces se puede integrar ⁽²⁾ el desarrollo asintótico ⁽¹⁾ y resulta

$$\int_z^{\infty} f(z) dz \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n \cdot z^n}.$$

Por tanto, la función

$$f^{(-1)}(z) = \int_c^{\infty} e^{-xs} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

tiene el desarrollo asintótico

$$f^{(-1)}(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n z^n}.$$

Si $a_0 \neq 0$, entonces es

$$[f^{(-1)}(z) - a_0] \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n z^n}.$$

Aplicando la misma proposición a la función $f^{(-1)}(z)$, se deduce el desarrollo asintótico de $f^{(-2)}(z)$, y así sucesivamente los de $f^{(-3)}$, $f^{(-4)}$,...

5.—Consideremos la transformada de Laplace $f(z)$ de una variable compleja dual $z = x + ky$ ($k^2 = 0$) y de generatriz $\varphi(t)$

$$f(z) = \int_c^{\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt \quad (c > 0) \quad [1]$$

(1) S. PINCHERLE, *R. della R. Accad dei Lincei* (1904) p. 513, N. Nielsen, *Ann. de Scal. Norm.*, t. XIX, p. 427.

(2) Véase E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, Cap. I, Paris 1928.

Puesto que es

$$e^{-tz} = e^{-t^2} \cdot e^{-kty} = e^{-tw} (1 - kty)$$

resulta

$$f_{\alpha}(z) = \int_c^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{\alpha} \varphi(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-tz} t^{\alpha} \varphi(t) dt - ky \int_c^{\infty} e^{-tw} t^{\alpha+1} \cdot \varphi(t) dt \quad [2]$$

donde α es un número real cualquiera. Para $\alpha = 0$ resulta la [18].

Aplicando el teorema de Pincherle generalizado a las integrales de Laplace de la variable real t que figuran en el segundo miembro, se deduce el teorema siguiente:

Si la integral [1] converge en el semiplano $R(z) > \mu$, la integral [2] converge también en este dominio para todo α real y c positivo.

6. — Consideremos la integral doble de Laplace ⁽¹⁾

$$f(z, w) = \int_a^{\infty} \int_b^{\infty} e^{-zs - yw} \varphi(x, y) dx dy$$

Si ella converge acotadamente, en el semiplano asociado ($R(z) > \xi$, $R(w) > \eta$) la función $f(z, w)$ de dos variables complejas z y w es holomorfa en dicho dominio y sus derivadas parciales sucesivas están definidas por la relación

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m \partial w^n} = \int_a^{\infty} \int_b^{\infty} e^{-zs - yw} (-1)^{m+n} x^m y^n \varphi(x, y) dx dy, \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

Más general; la integral doble

$$f_{\alpha, \beta}(z, w) = \int_a^{\infty} \int_b^{\infty} e^{-zs - yw} x^{\alpha} y^{\beta} \varphi(x, y) dx dy,$$

⁽¹⁾ J. C. VIGNAUX, *Sobre la teoría de las funciones determinantes de dos variables*, A. Soc. Cient. Argentina, t. CXII (1931); *Sulla trasformazione di Laplace di due variabili* (Reale Accademia N. dei Lincei (Roma) 18 ag.(1933).

⁽²⁾ J. VIGNAUX, *Un teorema sulle integrali doppie di Laplace* (R. Acc. N. dei Lincei, junio 1933) y *Bull. Soc. Royale des Sc. di Liege*, n° 5 (1933).

donde α y β son dos números reales y $(a > 0, b > 0)$, converge en el mismo dominio de la integral doble [1].

La función $f(z, w)$ definida por la [1] admite una representación asintótica en serie doble de potencias

$$f(z, w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{m, n}}{z^{m+1} w^{n+1}}$$

y como es legítima la integración término a término de este desarrollo ⁽²⁾ se deduce para la función determinante

$$\int_s^{\infty} \int_w^{\infty} f(z, w) dz, dw = F(z, w)$$

consecuencias análogas que para el caso de una variable.

(²) J. C. VIGNAUX, *Sobre las series dobles asintóticas*, Anales de la Soc. Cient. Argentina, T. CXXV, junio 1938.

CONSIDERACIONES PRACTICAS SOBRE EL TRAZADO GEOMETRICO DE LA CUBATRIZ Y LA ESTROFOIDE (*)

POR EL ING.

JERONIMO SANGUINETI

Si sobre el eje de las x (fig. 1) trazamos la circunferencia generatriz C_0 , con radio $R = 1/2$, tangente en el origen, y con centro en este último punto O , circunferencias C_i de radio cualquiera, las tangentes en D , A_i , las radiales de polo O que pasen por los puntos S_i de intersección de las C_i con C_0 hasta cortar la tangente en D , en punto M , luego las radiales de polo D , que pasen por los mismos puntos S_i , y finalmente, se transporta con radio $\rho = OM$, y centro O , el punto M sobre la tangente de la circunferencia C_i correspondiente, el lugar geométrico de los puntos M_i , E_i y N_i , son respectivamente: la cubatriz, una circunferencia de radio 1, y la estrofoide.

Para probarlo, estableceremos, en cada caso, la ecuación de la curva, o bien sus propiedades geométricas.

A. — Lugar de los puntos M_i .

De los triángulos OA_iE_i y ODM , se deduce:

$$OD:OM = OA_i:OE_i.$$

Reemplazando valores:

$$1:\rho = x:1,$$

de donde

$$x = 1/\rho.$$

(*) Véase « Anales de la Sociedad Científica Argentina », *Contribución al estudio de algunas curvas particulares*, de agosto de 1939.

Por otra parte siendo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

se deduce:

$$y = \frac{1}{x} \sqrt{1 - x^4},$$

que es la ecuación de la cubatriz en coordenadas cartesianas ortogonales.

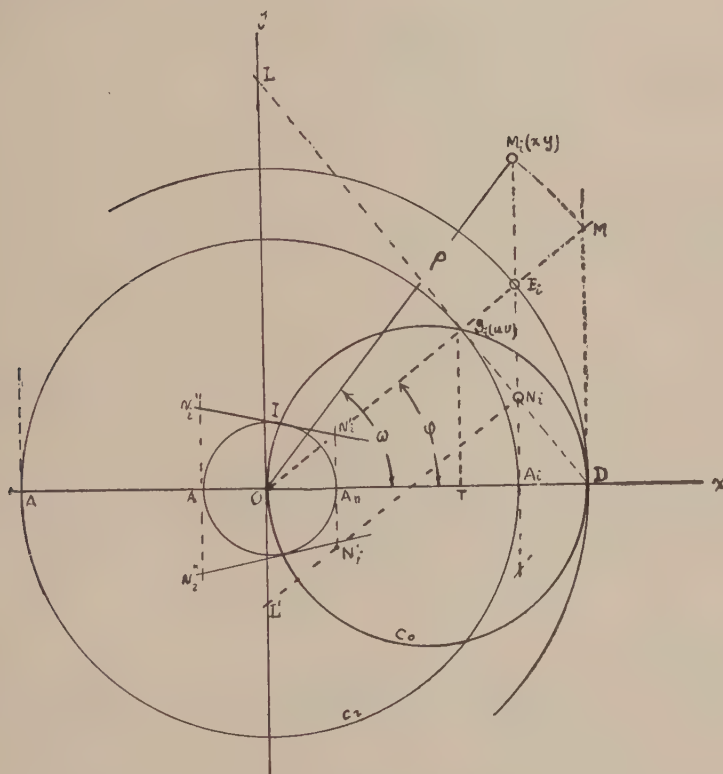


FIG. 1.

B. — Los triángulos OA_iE_i y ODS_i , nos da:

$$OE_i = OD = 1;$$

de donde se infiere que el lugar de los puntos E_i , es una circunferencia de radio $R = 1$; la denominaremos circunferencia auxiliar, pues permite construir la cubatriz de una manera rápida y sencilla.

C. — Hagamos (fig. 1) $OS_i = \tau$, y $ON_i = \sigma$; tendremos, sucesivamente:

$$x = OA_i = OS_i = 1/\rho,$$

$$A_i D = 1 - x = 1 - 1/\rho.$$

Del triángulo OMD , se tiene:

$$1 = \rho \cos \varphi; \quad \text{de donde} \quad \cos \varphi = 1/\rho = x.$$

Como, del triángulo $OA_i M_i$, $x = \rho \cos \omega$, se deduce:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos \omega}} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{\cos \omega} \quad [1]$$

Igualando los valores hallados de $1/\rho$, en función de ω y de φ , tenemos:

$$\cos \varphi = \rho \cos \omega = \sqrt{\cos \omega} \quad [2]$$

Manteniendo para N_i , las coordenadas corrientes (x, y) , tendremos:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

y por lo tanto,

$$\sigma^2 = \cos^2 \varphi \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi/2}.$$

Finalmente:

$$\sigma = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi/2},$$

que es la ecuación polar de la estrofoide.

En coordenadas cartesianas, siendo (u, v) las coordenadas de la circunferencia generatriz, y en mérito a las ecuaciones [1] y [2] precedentes, y de la semejanza de los triángulos $S_i TD$ y $N_i A_i D$, se tiene sucesivamente:

$$u = 1/\rho \cos \varphi = 1/\rho^2 = \cos^2 \varphi = x^2,$$

$$v^2 = u(1 - u) = x^2(1 - x^2);$$

y finalmente:

$$\frac{y}{1-x} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

De aquí:

$$y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Esta última, puede ponerse en otra forma interesante, recordando que:

$$\text{Lg} \frac{1+x}{1-x} = 2 \text{Arg tg } h x.$$

De esta relación sacamos:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = e^{\text{Arg tg } h x};$$

y por lo tanto:

$$y = x e^{-\text{Arg tg } h x},$$

que es una fórmula cómoda para el cálculo por logaritmos.

Observaremos:

1° Que de la construcción de la estrofoide (fig. 1), si cortamos el eje de las y , con la perpendicular a LD , levantada en el punto N_i , la igualdad de los triángulos rectángulos LOD y LN_iL' , nos dice que

$$OD = N_iL' = 1.$$

Esta propiedad de la estrofoide, conocida en cinemática, permite, en forma fácil y sencilla, como veremos más adelante, el trazado de tangentes y determinar el centro de curvatura.

2° De manera idéntica, el triángulo OIN_i' es isósceles, por lo tanto:

$$IN_i' = IO = IN_i'',$$

que es la forma clásica de construcción de la curva.

TRAZADO DE TANGENTES. — Para el trazado de tangentes en puntos de la cubatriz, nos valdremos de sus propiedades geométricas. Estableceremos, pues, algunas relaciones previas.

Estas relaciones nos permiten señalar los siguientes procedimientos:

a) Sobre la perpendicular, en el origen, al radio vector OA , tómese a uno y otro lado, $OE = \frac{1}{2}QA$ y $OT_0 = 2RA$. Las rectas EA y T_0A , serán la Normal y la Tangente en A a la cubatriz.

b) Se puede prescindir del trazado de RQ , observando que la ordenada del punto E es $\frac{1}{2}y$. Bastará intersacar OE con la paralela al eje de las x que pasa por el punto medio de AC .

c) O bien, finalmente, trácese por A , la perpendicular a la recta OM , que une el origen O , con el punto medio M de AQ .

El lugar geométrico de los puntos E y T_0 son curvas cuyas ecuaciones polares son respectivamente:

$$\rho' = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{\cos \omega}} \quad \text{y} \quad \rho'' = \frac{2}{\sqrt{\cos \omega}}.$$

El cálculo del radio de curvatura para un punto ρ_0 , de argumento ω_0 , se efectúa mediante la fórmula siguiente:

$$r_0 = \frac{4 [\cos \omega (1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \omega)]^{3/2}}{3 \cos^2 \omega - 1}.$$

Para el trazado de tangentes y la determinación del centro de curvatura de la estrofoide, utilizaremos algunas de las propiedades conocidas en cinemática que han dado lugar a los teoremas, principios y métodos de Euler, Savary y de Bobillier.

Consideraremos, pues, a la estrofoide, como engendrada (fig. 3) por el movimiento del vértice P de un ángulo recto, uno de cuyos lados pasa constantemente por el punto fijo D , y cuya distancia PP_1 , al eje de las y del otro lado, es constante e igual a OD .

Para obtener la tangente en P , trácese por D y PP_1 , respectivamente, perpendiculares a DP y P_1O , cuya intersección B determinará la normal BP ; por lo tanto la perpendicular en P a BP , será la tangente buscada. El punto B , es el centro instantáneo de rotación, o, más propiamente, de velocidades.

El movimiento de P hace que B describa una trayectoria, que en el presente caso es una trayectoria polar parabólica, con foco en D , y cuya directriz es el eje de las y . Efectivamente, de la comparación

de los triángulos NPP_1 y ODN , se tiene $BD = BP_1$. La curva móvil que la envuelve, es otra parábola con foco en P_1 y directriz ND . Es congruente con la anterior; la tangente de contacto a la trayectoria polar, BN , pasa por el centro de deslizamiento N . Por lo tanto, estas parábolas tienen la misma normal, e igual radio de curvatura $R_1 = R_2 = 2 BB_0$.

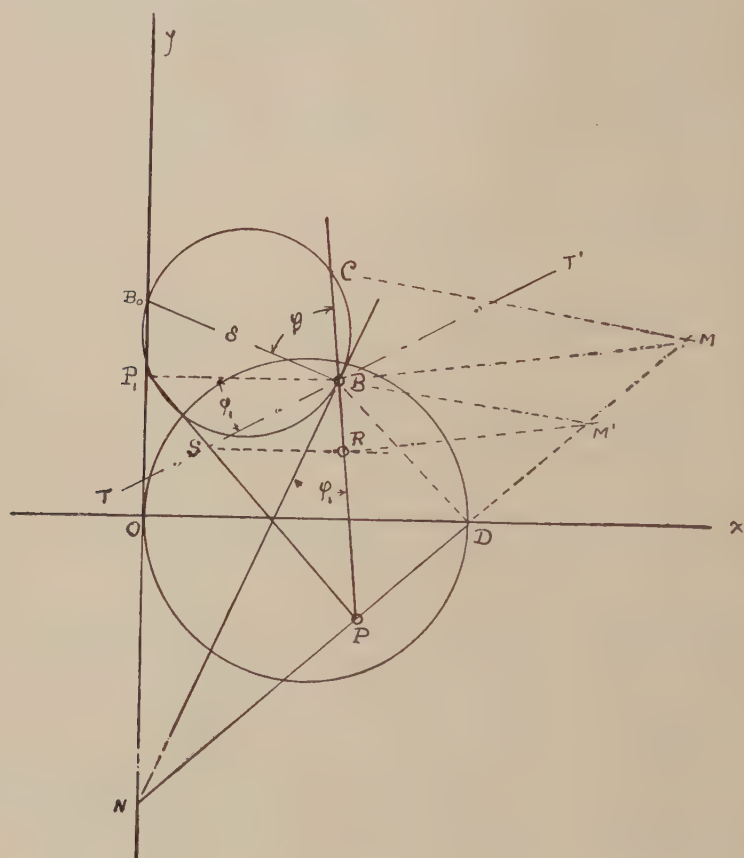


FIG. 3.

Para determinar el centro de curvatura R , necesitamos determinar previamente el punto de inflexión C del radio polar PB , el cual se encuentra sobre la circunferencia de inflexión, tangente a la trayectoria polar en B . El diámetro de esta circunferencia se deduce del principio de Euler y Savary siguiente:

$$\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} = \pm \frac{1}{\delta}$$

Vimos que $R_1 = R_2$, luego

$$\delta = \frac{1}{2} R_1 = BB_0.$$

El punto B_0 es el polo de inflexión.

Fijado el punto C , trácese por él una recta cualquiera que corte a la PD en un punto M ; por B , la paralela a la CM y determinará el punto M' ; por este último punto la paralela a BM que intersecará en R al radio polar.

El segmento RP es el radio r de curvatura de la estrofoide en el punto P .

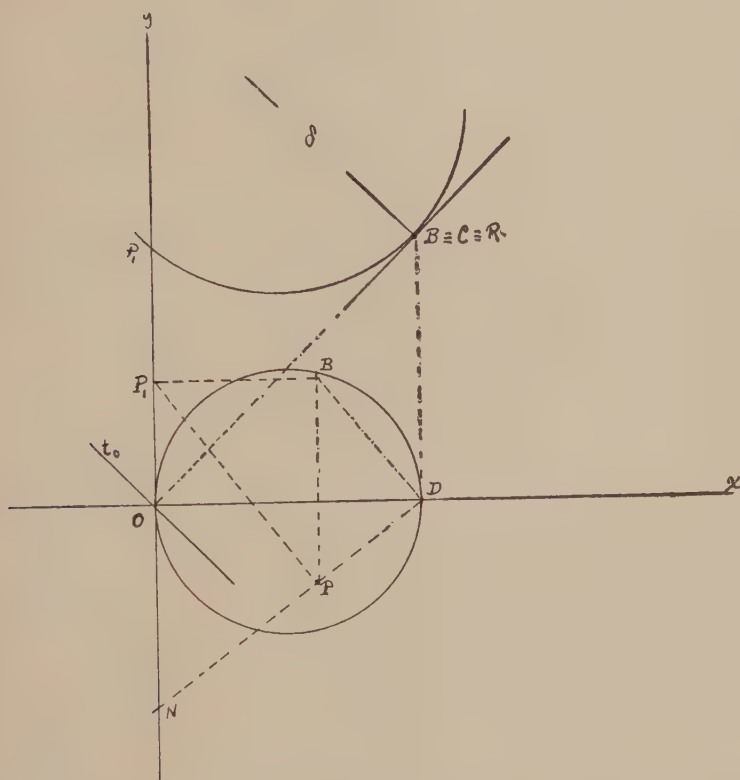


FIG. 4 a.

Si con los elementos del dibujo (fig. 3), hacemos $BP = r_1$, $PC = s$, $BR = r_2$, áng. $B_0BC = \theta$, se tendrá (principio de Euler Savary)

$$\left(\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}\right) \cos \theta = \frac{1}{\delta}, \quad [1]$$

$$y \quad r s = r_1^2. \quad [2]$$

$$r_s = r_1^2. \quad [2]$$

Aplicando la ecuación [2] se llega al mismo resultado, pues se tiene:

$$s = PC = 1 \quad , \quad r_1 = BP = 1/2 ;$$

luego:

$$r = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} .$$

Como una comprobación de los resultados obtenidos, pueden calcularse estos valores analíticamente. En efecto, si en la fórmula general del radio de curvatura, en coordenadas polares, cuyo desarrollo omitimos por considerarlo superfluo, hacemos para simplificar:

$$A = \left(\frac{\cos 2 \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 , \quad B = \operatorname{sen}^2 \varphi (3 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2$$

y

$$C = \cos 2 \varphi (3 + \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \operatorname{tg}^4 \varphi) ,$$

el valor de r será:

$$r = \frac{(A + B)^{1/2}}{A + 2B + C} .$$

Para $\varphi = 45^\circ$, se tiene:

$$A = 1 \quad , \quad B = 8 \quad \text{y} \quad C = 0 ;$$

luego:

$$r = \frac{\sqrt{8^3}}{16} = \sqrt{2} .$$

Para $\varphi = 0^\circ$:

$$A = 1 \quad , \quad B = 0 \quad \text{y} \quad C = 3 ;$$

luego:

$$r = \frac{1}{4} .$$

Volviendo a la fig. 3, si sobre el lado $P_1 B$, trazamos un ángulo $\varphi = P_1 B T$ igual al ángulo NBP , formado por la normal del punto P (radio polar) y la tangente BN a la curva polar, el lado TT' es eje de colineación. Las rectas que unen dos puntos P_1 y P y la de sus respectivos centros de curvatura se cortan en puntos del eje. Es en esta propiedad que se funda el método indicado por Bobillier.

La recta PP_1 corta al eje de colineación en S . Como el punto P_1 en su movimiento recorre una recta, su centro de curvatura está en el infinito. Bastará trazar entonces por S una paralela al eje de las x que intersecará al radio polar en R , centro de curvatura de la curva en P .

Concretándonos al bucle de la estrofoide, es decir, a la parte de la curva comprendida entre las abscisas 0 y 1, si se considera al sólido de revolución que se engendra al girar alrededor del eje de las x , el área de la superficie, viene dada por la expresión:

$$S = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = 2\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

y la del volumen:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \frac{1-x}{1+x} dx = 2\pi \left(\text{Lg } 2 - \frac{2}{3}\right).$$

Como una variedad de la estrofoide, puede estudiarse la curva, cuya ecuación polar es la siguiente

$$\rho' = \rho (1 + \text{sen } \varphi) = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} (1 + \text{sen } \varphi).$$

Dejamos su estudio y trazado al cuidado del lector.

Buenos Aires, diciembre 11 de 1939.

NINFALIDOS ARGENTINOS

NOTAS ADICIONALES

POR

KENNETH J. HAYWARD

Actinote calymna Jordan.

Actinote parapheles Jordan.

Actinote surima Schaus.

Según Jorgensen (*in. lit.*), las larvas de estas tres especies fueron encontradas por él en grandes cantidades sobre *Eupatorium vernonia*, donde viven en forma gregaria. Las larvas de las tres especies son muy similares.

Euptoieta claudia Cr., ab. *infuscata* nov.

La faz superior como en la forma nominotípica, pero con el diseño algo más oscuro, especialmente en lo referente a la sufusión negruzca en la base de las alas y en el ala posterior entre el ángulo interior y la célula mediana superior donde hay una faja negruzca submarginal. El punto negro de la hilera submarginal es grande y resaltante en esta célula.

En la faz inferior el ápice del ala anterior es de color pardo-café oscuro y el ala posterior de este mismo color en toda su extensión; el único diseño siendo una faja postbasal mucho más oscura entre la costa y la célula discoidal, una mancha de igual color oscuro y de forma de una « V » sobre las nervaduras M3, punto de nacimiento de Cu2 y Cu2 hasta $\frac{1}{3}$ y la faja submarginal entre la costa en el ángulo interior y la primera célula mediana que es rojizo-oscuro. La pequeña línea blanca sub-basal de la forma nominotípica falta.

Holotipo de Colonia Barón, F. C. O. (Pampa Central), ♂, en la colección Breyer. (*Benson*, 30, v. 1937).

Victorina trayja Hübner.

Ejemplares de esta especie han sido capturados por el autor en Concordia de Entre Ríos. (Nueva procedencia).

Coea acheronta Fabricius.

1775. Fabricius, Syst. Ent. p. 501.

1921. Seitz Macrolep., 5, p. 471, pl. 104 d.

Este insecto ha sido descripto como *cadmus* y *pherecides*, por Cramer. Color de fondo del ala anterior pardo-rojizo, la parte apical desde más o menos $\frac{1}{3}$ costa en línea recta con el margen distal, y el margen distal, negruzcos, con una hilera oblicua de cuatro o cinco puntos blancos y una pequeña mancha hialina subapical. El ala posterior algo más oscura y con una fina y pequeña cola.

La faz inferior pardo claro, el ala anterior con fajas basal, post-basal y mediana y el ala posterior con una faja mediana, compuestas estas fajas de un color más bien grisáceo entre líneas oscuras e irregulares. El área entre las fajas medianas y el margen con sombras más oscuras. En la base del ala posterior hay dos o tres pequeños puntos más claros que el color de fondo. Su tamaño muy variable, entre 50-68 mm., como también el diseño e intensidad de su coloración en su faz inferior.

Capturado en Aguaray (Provincia de Salta), por el Dr. José Yepes, en 1937.

Hypanartia bella Fabricius.

Según Jorgensen (*in lit.*) las larvas viven entre hojas de *Celtis micrantha*.

Gynacea dirce Linnaeus.

Las larvas comen *Cecropia* sp. (Jorgensen *in lit.*).

Callicore candrena (?), ab. **breyeri** nov.

He recibido hace varios años para su clasificación, del señor Alberto Breyer, un *Callicore* que difiere de todos los que conozco, y soy de opinión de que se trata de una aberración de *candrena* Godt.

El abdomen falta, por lo cual no es posible examinar su genitalia para fijar con seguridad la especie.

En la faz inferior las bases de ambas alas tienen un reflejo azul vivo y las manchas claras subapicales del ala anterior son muy resaltantes. La hilera submarginal de máculas, separadas por las nervaduras del color de fondo, que se encuentran en el ala posterior, son de un verde dorado y se extienden dentro del ala por una distancia igual a casi la mitad de la distancia hasta la base.

En la faz inferior el ala anterior es como en *candrena*, las líneas blancas y la entre-línea azul que se encuentran sobre el ápice y margen exterior negros son muy bien marcadas. El color de fondo

del ala posterior es de un gris plateado semejante al de ciertas especies del género *Perisama* y como diseño lleva una fina línea negra marginal y una gruesa línea negra submarginal y en la base del ala hay finas líneas negras sobre el precostal, sobre al analis superior hasta que se une con la línea gruesa submarginal y desde el punto de nacimiento de Cu^2 sobre esta nervadura hasta cerca de la línea negra submarginal y sobre la mediana hasta el punto de nacimiento de M^2 ; estas dos últimas líneas unidas con otra entre el punto de nacimiento de Cu_1 hasta la terminación de la línea sobre Cu^2 . La costa es finamente roja y hay una pequeña mancha negra a $1/3$.

Procedencia Misiones. Holotipo en la colección Breyer.

Esta aberración se asemeja bastante a la descripta por Breyer en *Rev. Soc. Ent. Arg.*, 2, (4): 181 (1929).

Adelpha lara Hewitson.

Adelpha mainas Fruhstorfer es un sinónimo.

Adelpha alala Hewitson.

1847. Hewitson, *Ann. Mag. Nat. Hist.*, 20: 261.

s. sp. **fillo** Fruhstorfer.

Ent. Zt. Stuttg., 21: 172.

Esta forma o subespecie fué descripta de un ejemplar de la Argentina. No la conozco, pero, según Hall (*Entom.* 71: 209, 1938), difiere de la forma *negrina* (ver Seitz *Macrolep.*, 5: 515, pl. 108 a), en tener las fajas blancas medianas más angostas.

Adelpha delphicola Fruhstorfer.

1910. Koch, *Grünberg Reise*, 2: 308.

s. sp. **ophellas** Fruhstorfer.

1915. Fruhstorfer en Seitz *Macrolep.*, 5: 519.

Según Hall (*Entom.* 71: 211, 1938), los tipos de *ophellas* son de procedencia Espíritu Santo y Paraguay y existen en la colección del Museo Británico, ejemplares del noroeste de la Argentina.

Adelpha iphicla Linnaeus.

1758. Linnaeus, *Syst. Nat.*, 1: 780.

Tenemos que incluir entre los sinónimos las subespecies *gortyna* Fruhstorfer (en Seitz *Macrolep.*, 5: 523, 1915), *pharae* Fruhstorfer (*loc. cit.*) y *leucates* Fruhstorfer (*loc. cit.*).

Adelpha abia Hewitson.

1850. Hewitson, *Ann. Mag. Nat. Hist.*, (2), 6: 436.

La especie citada como *abia* por Fruhstorfer en Seitz (5: 524, pl. 190 a), no es la *abia* de Hewitson, sino una nueva especie, que ha recibido el nombre:

mincia Hall.

1938. Hall, Entom., 71: 257.

Los ejemplares argentinos, por lo tanto, deben llevar este nombre y no lo de *abia* (Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.*, 4: 131, fig. 5, N° 7), habiendo seguido en mi monografía la clasificación de Fruhstorfer.

Ejemplares de esta especie han sido capturados de tiempo en tiempo en trampas caza-moscas cebadas con un producto llamado « Clensel » en Concordia, Entre Ríos.

Adelpha calliphane Fruhstorfer.

Según Jorgensen (*in lit.*), las larvas se alimentan sobre yerba, *Ilex paraguariensis*.

Adelpha serpa Boisduval.

1836. Boisduval, Spec. Gen., 1, pl. 8.

La subespecie *damon* Fruhstorfer (en Seitz *Macrolep.*, 5: 531, pl. 107 c), es un sinónimo y la subespecie *hyas* Boisduval (*Cuv. Regne. Anim. Ins.*, 2, pl. 138), solamente una forma.

Adelpha zea Hewitson.

1850. Hewitson, Ann. Mag. Nat. Hist., (2), 6: 435.

Las subespecies *tarpeia* Fruhstorfer (en Seitz *Macrolep.*, 5: 532, pl. 110A b) y *serpentina* Fruhstorfer (en *op. cit.*, p. 532), son variaciones de *zea* y deben ser consideradas como sinónimos.

Ageronia fornax Hübner.

Las larvas viven en torma gregaria sobre *Dalechampia* (Jorgensen *in lit.*).

Ageronia februa Hübner s. sp. **atinia** Fruhstorfer..

Una nueva procedencia es la provincia de Corrientes.

En su « Terceiro Catalogo dos Insectos que vivem nas Plantas do Brasil », el Dr. Costa Lima cita como plantas de alimentación para especies de la familia *Nymphalidae*, las siguientes, que son adicionales a las mencionadas en mi monografía sobre esta familia, y trabajos subsiguientes, y como muchas de estas plantas, o plantas vecinas y co-genéricas, son encontradas en el norte de nuestro país, sería posiblemente conveniente citarlas aquí.

Actinote paraphelus Jord., sobre *Mikania callineura*.

Actinote pellenea Hbn., sobre *Eupatorium* sp.

Dione juno Cr., sobre *Passiflora caerulea*.

Dione vanillae L., son *Passiflora caerulea*, *P. vellozii* y « madre selva »

Euides aliphera Godt., sobre *Passiflora amethystina*.

Euptoieta hegesia Cr., sobre *Turnera* sp.

Phyciodes lansdorfi Godt., sobre *Cyrthantera pohliana*, *Fittonia*
y *Urticaceae*.

Phyciodes eunice Hbn., sobre *Fittonea argytoneura*.

Phyciodes teletusa Godt., sobre *Cyrthantera pohliana*.

Hypanartia lethe Fabr., sobre *Boehmeria caudata* y *Celtis* sp.

Precis lavinia Cr., sobre *Thunbergia alata*.

Victorina steneles L., sobre *Salvia splendens*.

Victorina trayja Hba., sobre *Ruellia amoena* (*Stephanophysum longifolium*).

Megalura chiron Fabr., sobre *Urticaceae*.

Gynacea dirce L., sobre *Cecropia pachystachia*, *Eucalyptus* spp.,
e *Inga* sp.

Catonephele numilia penthia Hew., sobre *Alchornia iricoruna* y
A. cordata.

Myscelia orsis Dru., sobre *Dalechampia triphylla*.

Callicore janeira Fldr., sobre *Trema micrantha*.

Dynamine agacles Dalm., sobre *Dalechampia triphylla*.

Dynamine artemesia Fabr., sobre *Euphorbiaceae*.

Dynamine mylitta Cr., sobre *Dalechampia triphylla*.

Adelpha isis Dru., sobre *Cecropia pachystachia*, *Coussapoua schatti*
y *Pourouma acutifolia*.

Adelpha syma Godt., sobre « sarandí ».

Ageronia epinome Fldr., sobre *Dalechampia ficifolia* y *D. stipu-*
lacea.

Ageronia fornax Hbn., sobre *Dalechampia* sp.

Ageronia amphinome aegina Fruhst., sobre *Eupatorium* sp.

Ageronia arete Dbl. et Hew., sobre *Dalechampia* sp.

Chlorripe kallina Stdgr., sobre *Celtis* (?) *brasiliensis*.

Prepona demophon L., sobre *Mollinedia brasiliensis*.

Concordia, 1 de octubre de 1939.

BECAS DE LA ASOCIACION ARGENTINA PARA EL PROGRESO
DE LAS CIENCIAS

Esta entidad otorgará cuatro becas para realizar estudios de perfeccionamiento en el extranjero, consistentes en el pago del pasaje de ida y vuelta y el costo de permanencia durante un año, hasta un máximo de 9500 pesos en total, según el país a que vaya becado.

Dos de estas becas son para personas que se hayan formado o actúen en las universidades o institutos científicos del interior, siempre que se comprometan a desarrollar a su retorno sus actividades en las mismas universidades o institutos. A las otras dos pueden presentarse estudiosos de todo el país, que cultiven cualquier actividad científica. La inscripción a estas becas quedará cerrada el 30 de abril próximo.

Otorgará, asimismo, una beca interna, por un período de diez meses, con el estipendio de 300 pesos mensuales. Esta se otorgará exclusivamente a un candidato que desee efectuar estudios que signifiquen el entrenamiento en la investigación científica. La persona designada deberá dedicarse "full-time" a dichos estudios, con exclusión de toda otra actividad, en el laboratorio o instituto adonde fuera designada. La inscripción a esta beca quedará cerrada el 28 de febrero próximo.

Las personas interesadas en cualquiera de estas becas deberán dirigirse por carta a la secretaría de la Asociación, Perú 272, requiriendo el reglamento pertinente y los formularios de solicitud correspondientes.

COMPAÑIA INDUSTRIAL Y MERCANTIL THYSSEN LTDA.

THYSSEN - LAMETAL

Belgrano 752



Buenos Aires

PRODUCTOS METALURGICOS



CEMENTO PORTLAND

"CORCEMAR"

Fábrica Pipinas

Representantes Exclusivos

MOTORES DIESEL

BOMBAS Y VALVULAS

Sucursales en:

BAHIA BLANCA
CORDOBA
JUNIN
LA PLATA
MAR DEL PLATA

MENDOZA
NECOCHEA
PARANA
RESISTENCIA

ROSARIO
SALTA
SANTA FE
TUCUMAN



GANARA TIEMPO Y DINERO!

ALTA RESISTENCIA - RAPIDEZ CONSTRUCTIVA - MAYOR SEGURIDAD

Empleando 'Incor', el cemento argentino de endurecimiento rápido, el profesional puede reducir el periodo de los trabajos constructivos de hormigón, hasta un 60 % del tiempo que necesitaría con un cemento común. La alta resistencia inicial del 'Incor' permite desencofrar en la mayoría de los casos,

con la misma seguridad, hasta en una quinta parte del tiempo que se requiere usando cemento común. Con 'Incor' se utilizan con mayor frecuencia los encofrados, equipos y herramientas y se anticipa considerablemente la terminación de la obra con el consiguiente beneficio para el propietario.

'INCOR'

El cemento argentino de endurecimiento rápido



INDUSTRIA ARGENTINA

COMPANIA ARGENTINA DE CEMENTO PORTLAND
RECONQUISTA 46 - BUENOS AIRES • SARMIENTO 991 - ROSARIO



INDUSTRIA ARGENTINA

COMPANIA DE SEGUROS
La Comercial e Industrial de Avellaneda
 SOCIEDAD ANONIMA

Incendio

Cristales

Avda. Mitre 429 (piso 1º) - Avellaneda — Unión Telefónica 22-7941



Compañías Argentinas de Seguros

INCENDIO, VIDA y FLUVIALES - MARITIMOS

471 - San Martín - 475 -- Buenos Aires

Telef.: U. T. (31) Retiro 2747, 2890 y 2727

Capitales integrados	\$	2.600.000.—
Reservas	>	2.503.933.44
Distribuido entre sus asegurados por siniestros	>	22.524.556.53



CASA MATRIZ

Diag. Pte. R. Sáenz Peña 530

BUENOS AIRES

Seguros de Vida en vigor:

\$ 277.955.426

Capital y Reservas:

\$ 50.808.471

Pagado a Asegurados y Beneficiarios desde 1923:

\$ 86.460.096



Seguros

de

Vida • Incendios

Automóviles • Marítimos

Accidentes Individuales y

Colectivos

Capital y Reservas: \$ 11.700.000 c/l.

Siniestros pagados: \$ 25.000.000 c/l.

"La Germano-Argentina"
Compañía de Seguros

MAIPU 262

Buenos Aires

Instituto Italo Argentino

DE SEGUROS GENERALES (S. A.)

Opera en Todos los Ramos

Teléfonos:

U. T. 35, Lib. 2011 al 15

BUENOS AIRES

Av. Roque Sáenz Peña 890

LANUSSE O PUBLICIDAD

FUNDADA EN 1889



COMPANIA DE SEGUROS GENERALES

LA ECONOMIA COMERCIAL

AVENIDA CORRIENTES 550 BUENOS AIRES



Alambres y rurales
 Artefactos sanitarios
 Bulonería y afines
 Calefacción
 Caños y accesorios
 Clavería y afines
 Cocinas y cacerolas
 Columnas de alumbrado

Construcciones industriales
 Construcciones metálicas
 Chapas lisas y canaleta
 Galpones y tinglados
 Hierros en general
 Mecánica especial
 Fundición
 Tambores y Tablestacas

« T A M E T »

CHACABUCO 132

Buenos Aires

CRISTALERIA

Magnin

y



Bolognini

Envases de Vidrio

Escritorio:

Caseros 3121

U. T. 61-0212

Fabrica:

Tabaré 1630

U. T. 61-3800



EL COMERCIO

Compañía de Seguros a Prima Fija

MAIPU 53 - BUENOS AIRES - U. T. 34, DEFENSA 2181-85

Vida, Incendios, Automóviles, Marítimos, Cristales

Presidente; ERNESTO MIGNAQUY

DIRECTORES: Paul E. Foucher, Carlos Arturo Mignacco, Andrés Iribarne, Sebastián Urquijo, Horacio F. Mignaqui, Néstor L. Casás, Andrés Barón Supervielle, Gustavo C. Torres, Alfredo Rojas Sánchez.

DIRECTORES SUPLENTEs: Miguel Campomar, Antonio D. Podestá, Pedro Etcheagaray. — **SINDICO:** Antonio A. García Morales. — **SINDICO**

SUPLENTE: Andrés Ronco. — **GERENTE:** E. P. Bordenave

Capital y reservas libres	\$ 7.199.684 m.l.
Reservas técnicas y matemáticas	\$ 11.770.382 m.l.
Pagos a asegurados	\$ 39.266.570 m.l.

52 años de existencia

CONSAGRAN A

"LA ROSARIO"

Compañía Argentina de Seguros

Su prestigiosa actuación y sólida responsabilidad financiera garantizan las operaciones que realiza

SECCIONES:

Incendio, Vida, Automóviles, Accidentes del Trabajo (Ley 9688) y Cristales

Capitales y Reservas: \$ 10.117.044.27 c/l.

Siniestros pagados: \$ 26.228.756.83 c/l.

Casa Central en Buenos Aires: AVENIDA DE MAYO 715

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
 Agullar, Félix
 Albizzati, Carlos M.
 Alessi, Juan M.
 Alvarez, Raúl J.
 Alvarez de Toledo, Bell-sario
 Allende Lezama, Luciano P.
 Anastasi, Camilo
 Anchorena, Juan E.
 André, Enrique de
 Afón Suárez, Vicente
 Aparicio, Francisco de
 Aráoz Alfaro, Gregorio
 Arce, Manuel J.
 Armani, Aquiles
 Arnaudo, Silvio J.
 Avila Méndez, Delfín
 Bado, Atilio A.
 Bachmann, Ernesto
 Baglietto, Eduardo E.
 Balbiani, Atilio
 Ballani, Luis M.
 Bancalari, Agustín
 Bandoni, Alfredo J.
 Barabino Amadeo, S.
 Bargna, Juan L.
 Barliari, Mariano J.
 Barral Souto, José
 Barrancos, Leónidas A.
 Becke, Alejandro von der
 Berrino, Juan B.
 Bertino, José Carlos
 Besio Moreno, Nicolás
 Bianchi Lischetti, A.
 Biggeri, Carlos
 Blanchard, Everard E.
 Blaquier, Juan
 Boaglio, Santiago
 Bolognini, Héctor
 Bonanni, Cayetano A.
 Bontempi, Luis
 Bordas, Alejandro F.
 Bordenave, Pablo E.
 Borzacov, Vladimir
 Borzi, Ana María
 Bosch, Gonzalo
 Bosísio, Anecto J.
 Bottaro, Juan C.
 Bozzini, Luis (h.)
 Briano, Juan A.
 Bulch, Raúl
 Bula, Clotilde A.
 Bunge, Juan C.
 Buontempo, Guillermo
 Burkart, Arturo
 Busso, Eduardo B.
 Butty, Enrique
 Buzzo, Alfredo
 Cailet Bois, Teodoro

Calandra, Raúl E.
 Canale, Humberto
 Capelli, Pedro F.
 Capurro, Roberto H.
 Carabelli, Juan José
 Carbone, Esteban
 Carbonell, José J.
 Cárcova, Enrique de la
 Carelli, Antonio
 Carelli, Humberto H.
 Caride Massini, Pedro
 Carman, Ernesto
 Carrea, Juan Ubaldo
 Cassacuberta, Antonio
 Castellanos, Alberto
 Castello, Manuel F.
 Castilleiras, Julio R.
 Ceppl, Héctor
 Cernuschi, Félix
 Cios, Enrique C.
 Cock, Guillermo E.
 Coni Bazán, F. A.
 Curti, Orlando P.
 Curutchet, Luis
 Chanourdie, Enrique
 Chizzini Melo, Aníbal F.
 D'Ascoli, Lucio
 Dassen, Claro C.
 Dasso, Ricardo L.
 De Cesare, Elías A.
 De Fina, Armando L.
 De la Ini, Juan E.
 Delleplane, Luis J.
 Dennler, Jorge
 Deulofeu, Venancio
 Díaz, Emilio C.
 Dieulefait, Carlos E.
 Doello-Jurado, Martín
 Dobranich, Jorge W.
 Domínguez, Juan A.
 Dubecq, Raúl E.
 Dueñas, José
 Duhan, Luis
 Dupont, Enrique
 Durañona y Vedia, A.
 Durrieu, Mauricio
 Escudero, Antonio
 Escudero, Pedro
 Faré, Santo S.
 Fernández, Alberto J.
 Fernández Díaz, A.
 Fernández Long, S.
 Figini, Angel
 Figuerero, Hernando W.
 Fischer, Gustavo Juan
 Flores, Emilio M.
 Florit Carlos J.
 Fossa Mancini, E.
 Franceschi, Alfredo
 Fürnkorn, Divico A.
 Gadda, Carlos Manuel
 Galmarini, Alfredo G.

Gando, Alfredo R.
 Gandolfi Herrero, Augusto
 Gandolfo, José S.
 Gascón, Alberto
 Gaspar, Fernando L.
 Géneau, Carlos E.
 Gerardi, Donato
 Ghigliazza, Sebastián
 Glagnoni, Bartolomé E.
 Giannone, José
 Gradín, Carlos
 Grieben, Arturo
 Gutiérrez, Ricardo J.
 Herbin, Luis A.
 Hermite, Enrique
 Herrera Vegas, M.
 Herzer, Bernardo
 Hickethier, Carlos F.
 Hofmann, Herbert
 Houssay, Bernardo A.
 Hoyo, Arturo
 Igartúa, Luis María
 Irigoyen, Luis H.
 Isetta, José
 Ivanisovich, Ludovico
 Jorge, José M.
 Jakob, Cristofredo
 Kervor, Juan B.
 King, Diarmid O.
 Kinkelín Pelletán, J. C. de
 Knoche, Walter
 Kraglievich, Nicolás T.
 Krapf, Eduardo
 Labarthe, Julio
 Lagunas, Simón
 La Menza, Francisco
 Laporte, Luis B.
 Larco, Esteban
 Lasso, Alfredo L.
 Latzina, Eduardo
 Lignéres, Roberto
 Lizer y Trelles, C. A.
 Lombardi, Alberto
 López Sommaschini, Antonio
 Loudet, Osvaldo
 Loyarte, Ramón G.
 Lugones, Arturo M.
 Llauró, José
 Mac Donagh, E. J.
 Magnin, Félix J.
 Magnin, Jorge
 Mainini, Carlos
 Mallol, Emilio
 Mamberto, Benito
 Marcó del Pont, E.
 Marchionatto, Juan B.
 Martignone, Eduardo
 Marotta, F. Pedro
 Marotta, R. Armando

Mata, Leopoldo
 Méndez, Julio
 Meoli, Gabriel
 Meoli, Humberto
 Mercáu, Agustín
 Meriggi, Juan C.
 Mermoz, Francisco A.
 Molfino, José F.
 Molina Carranza, L.
 Molle, Clotilde C.
 Montes, Vicente E.
 Moragues Bernat, Jaime
 Moreno, Evaristo V.
 Nágera, Juan José
 Natale, Alfredo
 Natale, Ernesto
 Negrete, Lucía
 Negri, Mario L.
 Nielsen, Juan
 Novelli, Armando
 Ogloblin, Alejandro
 Oliveri, Alfredo E.
 Ortiz, Aníbal A.
 Ortiz de Rosas, Jorge
 Otamendi, Gustavo
 Ottonello, Héctor
 Ottonello, Néstor J.
 Páez, José María
 Page, Franklin Nelson
 Palteví, y Oliveras, A.
 Parodi, Edmundo
 Parodi, Lorenzo R.
 Pasman, Rodolfo E.
 Pastore, Franco
 Paz Anchorena, José M.
 Pérez Hernández, A.
 Perrone, Cayetano
 Pestalardo, Agustín
 Pini, Aldo S.
 Platz, Hubert
 Fosadas, Carlos
 Quino, José Luis
 Quintern, Bruno F.
 Quiroga, Pedro R.
 Raimondi, Alejandro
 Raffo, Bartolomé M.
 Ramaccioni, Danilo
 Ramallo, Carlos M.
 Ratto, Héctor R.
 Rebuelto, Antonio
 Rebuelto, Emilio
 Reece, William Asher
 Repetto, Blas Angel
 Repossini, José
 Ringuelet, Emilio J.
 Risotto, Atilio A.
 Robles, Angel A.
 Rodríguez Aravena, S.
 Rodríguez, Miguel
 Roffo, Angel H.
 Roffo, Juan
 Roldán, Raimundo

Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.

Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leonidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solarí, Emilio F.
Solarí, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Victor J.

Storni, Segundo R.
Talana, Alberto F.
Talana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela Gil, José
Vela Huergo, Julio

Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wunenburger, Gastón
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Yepes, José
Zamboni, Agustín
Zapfi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ehin, José
Elizondo, Francisco M.

Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Gorcha, Agustín C.
Laciau, Juan Pedro

Magne de la Croix, P. A.
Mallhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano

Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Viticcioni, Fernando
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.

Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone

Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"

Jacobo Peuser, S. A.
Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.

Besio Moreno, Nicolás

Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Checchi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparr.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoeh D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Brogli, Alberto A.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique

Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo F.
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.

Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.

Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pascualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani
de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin

Schmiedecke, Augusto
Sparr, Enrique
Stuckert, Guillermo V.

Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio

Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Meede L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. José Piazza; Vice-presidente, Ingº Civil Francisco E. Urondo; Secretario de correspondencia, Ingº Quím. Rodolfo G. Christen; Secretario de actas, Ingº Quím. Carlos C. Christen; Tesorero, Ingº Quím. Guillermo Berráz; Vocal 1º, Ingº Civil José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocales suplentes, Ingº Agrº Bruno Santini y Prof. Julio Salaber; Encargado de Publicaciones, Ingº Civil José Babini; Encargado de Canje, Ingº Quím. Rodolfo Rouzaut.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bossi, Celestino
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos

Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Julá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mal, Carlos
Mántaras, Fernando

Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Mar-
cos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Nikilson, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo

Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Eduardo Carette; Vice-presidente, Ingº Cayetano C. Piccone; Secretario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Tesorero, Sr. Manuel Tellechea; Bibliotecario, Prof. Anibal Ruiz; Vocales: Dr. Juan B. Lara; Ingº Juan P. Toso; Ingº Angel Stura; Sr. Ranulfo Rosales; Dr. Juan P. Paganotto; Dr. Mario Bidone.

SOCIOS ACTIVOS

Ahumada, Ciro
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgos, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Cecce, Francisco M.

Dobbs, Leonel
Espinoza, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Guevara, José R.
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.

Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Piccone, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.

Ruiz, Anibal
Ruiz Leal, Adrián
Sáez Medina, Miguel
San Martín, José Ben-
to de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretaria, Dra. Juana Cortezzi; Tesorero, Dr. Carlos T. Teobaldo; Vocales: Ing^o Juan Sabato, Ing^o Manuel Ucha, Dr. Pedro G. Paternosto, Dr. Alberto E. Sagastume Berra.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel	Daló, Héctor R.	Loddel Palumbo, Enrique	Rodríguez, Marcelo R. N.
Angli, Jerónimo	Delprato, Ismael	Magliano, Hilario	Romano Yalour, Juan G.
Arroyo Basaldúa, Víctor M.	Ferrari, Obdulio J. F.	Marmonti, Angel	Sabato, Juan
Bauer, Conrado	Gascón, Jorge	Márquez, Anibal R.	Sáez, Francisco A.
Bonet, Luis A.	Gershánik, Simón	Massimino, Blas	Sagastume Berra, A. E.
Brau, Eduardo F.	Giovambattista, Humberto	Méndez, José D.	Sagastume, Carlos A.
Canals Frau, Salvador	Grisi, Adolfo P.	Micheletti, Luis A.	Scheggia, Eduardo R.
Carusi, Oreste	Inda, Carmen	Nico, Raúl	Teobaldo, Carlos
Coria, Pedro E.	Landolfi, José María	Oliva, Virgilio	Toranzos, Fausto L.
Cortezzi, Juana	Lizarán, Fernando	Paternosto, Pedro G.	Trejo, César A.
Crespi Gherzi, Rodolfo A.	Lockart, Carlos E.	Pera, Tomás Carlos	Ucha Udabe, Manuel
Christmann, Federico E.		Platzeck, Ricardo P.	Vucetich, Danilo C.
			Wilkins, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México	Janet, Pierre	París
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero	Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)	Kelper, Guillermo	Berlín
Avenidaño, Leonidas	Lima	Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Bachmann, Carlos J.	Lima	Langevin, Paul	París
Bodenbender, Guillermo	Córdoba	Levi, Beppe	Rosario
Bolívar, Ignacio	Madrid	Levi Civita, Tullio	Roma
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)	Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Borel, Emile	París	Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Bragg, William Henry	Londres	Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)	Monjaráz, Jesús E.	México
Cabrera, Blas	Madrid	Montel, Paul	París
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro	Moretti, Gastano	Milán
Carabajal, Melitón M.	Lima	Oliver Schneider, Carlos	Concepción (Ch.)
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)	Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Darmois, Georges	París	Perrin, Tomás G.	México
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)	Perrine, Carlos D.	Córdoba
Escomel Edmundo	Lima	Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Flebrig, Carlos	Munich (Al.)	Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Fontecilla Larraín, Arturo ..	Santiago (Ch.)	Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima	Rowe, Leo E.	Washington
González del Riego, Felipe ..	Lima	Tello, Julio C.	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)	Terraccini, Alejandro	Tucumán
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)	Valle, Rafael H.	México
Hadamard, Jacques	París	Vélez, Daniel M.	México
Hauman, Luciano	Bruselas	Villarán, Manuel V.	Lima
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)	Vitoria, Eduardo	Barcelona
Hijar y Haro, Luis	México	Volterra, Vito	Roma